

Chapitre 14 : Espaces vectoriels

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires.

1 Structure d'un espace vectoriel

1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition. On dit que E est muni d'une addition interne si on dispose d'une correspondance :

$$E \times E \rightarrow E, (u, v) \mapsto u + v \quad (1)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

Elément neutre : Il existe un vecteur nul $0_E \in E$ tel que $\forall u \in E, u + 0_E = u$.

Commutative : Pour tout $u, v \in E, u + v = v + u$.

Associative : Pour tout $u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$.

Opposable : Pour tout $u \in E$, il existe $-u \in E$ tel que $u + (-u) = 0_E$.

Définition. On dit que E est muni d'un produit externe compatible à l'addition si on dispose d'une correspondance :

$$\mathbb{K} \times E \rightarrow E, (\lambda, u) \mapsto \lambda.u, \quad (2)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

Eléments neutres : Pour tout $u \in E$, on a : $0_{\mathbb{K}}.u = 0_E$ et $1_{\mathbb{K}}.u = u$.

Associative : Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E, (\lambda\mu).u = \lambda.(\mu.u)$.

Distributifs : Pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $u \in E, (\lambda_1 + \lambda_2).u = \lambda_1.u + \lambda_2.u$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u_1, u_2 \in E, \lambda.(u_1 + u_2) = \lambda.u_1 + \lambda.u_2$.

Définition. On dit que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel si :

- E est non-vide ($0_E \in E$).
- E est muni d'une addition interne.
- E est muni d'un produit externe compatible à l'addition.

⊗ Ces deux opérations permettent de considérer les combinaisons linéaires.

1.2 Exemples de référence

1.2.1 Structures géométriques

Proposition 1.1. L'ensemble $\vec{P}$ des vecteurs du plan muni des opérations usuelles est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

L'ensemble $\vec{E}$ des vecteurs de l'espace muni des opérations usuelles est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Proposition 1.2. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des opérations suivantes est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

⊗ En particulier, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

1.2.2 Structures analytiques

Proposition 1.3. *L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni des opérations :*

$$(u_n)_{n \geq 0} + (v_n)_{n \geq 0} = (u_n + v_n)_{n \geq 0} \text{ et } \lambda \cdot (u_n)_{n \geq 0} = (\lambda u_n)_{n \geq 0} \quad (4)$$

Le vecteur nul est la suite constante nulle.

Proposition 1.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni des opérations :*

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \text{ et } (\lambda \cdot f)(t) = \lambda f(t). \quad (5)$$

Le vecteur nul est la fonction constante nulle.

1.2.3 Structures algébriques

Proposition 1.5. *L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni des opérations :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n \text{ et } \lambda \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda a_n) X^n. \quad (6)$$

Le vecteur nul est le polynôme nul.

Proposition 1.6. *L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni des opérations :*

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}. \quad (7)$$

Le vecteur nul est la matrice nulle.

Proposition 1.7. *Le corps des complexes $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni des opérations usuelles. Le vecteur nul est le nombre 0.*

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition. On dit que F est un sous- $\mathbb{K}$ -espace vectoriel d'un espace vectoriel E si $F \subset E$ et F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni des opérations induites.

Proposition 2.1. *Soit F une partie de E . L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ssi F est non-vide et stable par combinaison linéaire.*

⊗ Il suffit de plonger F dans un espace de référence E et de démontrer les deux propriétés :

Non-vide : Il existe un vecteur dans F (en particulier, on a $0_E \in F$).

Stable par combinaison linéaire : Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F$, on a $u + \lambda v \in F$.

Définition. Pour une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ d'un espace vectoriel E , l'espace engendré par la famille est défini par :

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, \dots, e_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ pour } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}. \quad (8)$$

En particulier, les espaces engendrés sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Proposition 2.2. *Si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $e_1, \dots, e_n \in E$ alors le sous-espace $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, \dots, e_n)$ est inclus dans F , i.e. $e_1, \dots, e_n \in F \Rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, \dots, e_n) \subset F$.*

2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Proposition 2.3. Pour deux sous- $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , on dispose des opérations :

Intersection : $F_1 \cap F_2 = \{u \in E \text{ tel que } u \in F_1 \text{ et } u \in F_2\}$.

Somme : $F_1 + F_2 = \{u_1 + u_2 \text{ pour } u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2\}$.

Les ensembles $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$ sont des sous- $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de E .

⊗ Pour des sous-espaces vectoriels F, F_1 et F_2 de E , on a les inclusions suivantes.

Si $F \subset F_1$ et $F \subset F_2$ alors $F \subset F_1 \cap F_2$.

Si $F_1 \subset F$ et $F_2 \subset F$ alors $F_1 + F_2 \subset F$.

Définition. On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe si pour tout $u \in F_1 + F_2$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.

Dans ce cas, on note $F_1 \oplus F_2 = F_1 + F_2$ la somme des deux espaces.

On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si ils sont en somme directe et vérifie $F_1 \oplus F_2 = E$.

Proposition 2.4. Deux espaces F_1 et F_2 sont en somme directe ssi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

3 Familles de vecteurs

On se place dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

3.1 Famille libre

Définition. On dit qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}} \right). \quad (9)$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

⊗ Si deux vecteurs sont liés, on dit qu'ils sont colinéaires.

⊗ Si trois vecteurs sont liés, on dit qu'ils sont coplanaires.

⊗ Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.

Proposition 3.1. Lorsque $E = \mathbb{K}[X]$, on dit qu'une famille de polynômes non nuls $(P_1, \dots, P_n)$ est échelonnée en degré si :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n). \quad (10)$$

En particulier, les familles échelonnées en degré sont des familles libres.

⊗ La réciproque est fausse. La famille $((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$ est libre mais pas échelonnée.

3.2 Famille génératrice d'un espace

Définition. On dit qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E si :

$$\forall v \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i. \quad (11)$$

En particulier, on peut écrire $E = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(u_1, \dots, u_n)$.

⊗ Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore génératrice.

Définition. On dit que E est de dimension finie si il admet une famille finie génératrice. Sinon on dit que E est de dimension infinie.

⊗ $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ sont des exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie.

⊗ $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie mais $\mathbb{K}_n[X]$ est engendré par $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ et est un sous-espace de dimension finie.

3.3 Base d'un espace

Définition. On dit qu'une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si la famille est à la fois libre et génératrice dans E .

Dans ce cas, on dispose de l'assertion :

$$\forall v \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i. \quad (12)$$

Donc tout vecteur se décompose de manière unique dans la base et on note $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

⊗ Chacun des espaces vectoriels de référence de dimension finie dispose d'une base canonique.

Théorème 3.2. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces en somme directe. Si on dispose d'une base $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_{n_1})$ de F_1 et d'une base $\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_{n_2})$ de F_2 . Alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = (u_1, \dots, u_{n_1}, v_1, \dots, v_{n_2})$ est une base de $F_1 \oplus F_2$.

Proposition 3.3. Réciproquement si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Alors pour tout entier $1 \leq k < n$, les sous-espaces $F_1 = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, \dots, e_k)$ et $F_2 = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E .

⊗ En particulier, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on peut écrire :

$$E = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, \dots, e_n) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_i). \quad (13)$$