

Chapitre 18 : Déterminants

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires.
Soit E est un espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$.

1 Définition et premiers exemples

Théorème 1.1. *Il existe une unique application $\det_{\mathcal{B}_E} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant :*

multi-linéaire Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et toutes familles de vecteurs $x_1, \dots, x_n \in E$,
l'application $E \rightarrow \mathbb{K}, u_j \mapsto \det_{\mathcal{B}_E}(x_1, \dots, u_j, \dots, x_n)$ est linéaire.

alternée Pour $1 \leq i < j \leq n$ et toutes familles $x_1, \dots, x_n \in E$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}_E}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\det_{\mathcal{B}_E}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

unitaire $\det_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}_E) = 1$.

Définition. Pour $E = \mathbb{K}^n$ muni de la base canonique, on obtient l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$. Elle est multi-linéaire et alternée par rapport aux colonnes et $\det(I_n) = 1$.

⊗ Pour $n = 2$, on obtient $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

En considérant, $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \rho_1 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \rho_2 \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}$ en coordonnées polaires.

On a : $\det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2) = \rho_1 \rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$ ssi les vecteurs sont colinéaires.

⊗ Pour $n = 3$, on trouve $\det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2, u_3) = (u_1 \wedge u_2) \cdot u_3$. Cette quantité est le volume orienté du parallélépipède de base u_1, u_2 et u_3 . L'annulation est alors équivalente au caractère coplanaire des trois vecteurs.

Proposition 1.2 (Règle de Sarrus). Pour $n = 3$, on dispose de la formule :

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2. \quad (1)$$

2 Techniques de calcul

2.1 Pivot de Gauss-Jordan

Proposition 2.1. On peut effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice avec comme action :

Transvection Si $A \sim_C A'$ avec $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ alors $\det(A) = \det(A')$.

Dilatation Si $A \sim_C A'$ avec $C_i \leftarrow \mu C_i$ alors $\det(A) = \frac{1}{\mu} \det(A')$.

Permutation Si $A \sim_C A'$ avec $C_i \leftrightarrow C_j$ alors $\det(A) = -\det(A')$.

⊗ En particulier, pour un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition 2.2. On peut calculer directement le déterminant d'une matrice triangulaire :

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^n d_j = \det \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Corollaire 2.3. On peut effectuer des opérations simultanément sur les lignes avec les mêmes actions. On a : $\det({}^t A) = \det(A)$.

Théorème 2.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Théorème 2.5. Pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

2.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition. On définit les mineurs d'ordre $p < n$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les déterminants extraits de taille $p \times p$.

On appelle cofacteur de rang (i, j) le mineur renormalisé d'ordre $n - 1$:

$$\text{Cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det([A]_{k,l})_{\substack{k \neq i \\ l \neq j}}. \quad (3)$$

On appelle comatrice la matrice des cofacteurs et on note $\text{Com}(A) = (\text{Cof}_{i,j}(A))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Théorème 2.6. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $A^t \text{Com}(A) = (\det A) I_n$.

⊗ Ceci donne une formule explicite de l'inverse lorsque $\det(A) \neq 0$ par $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}(A)$. Cette formule est dans la pratique trop calculatoire pour $n \geq 3$ et on préfère la méthode du pivot : $(A|I_n) \sim (I_n|A^{-1})$ lors d'un calcul d'inverse.

Proposition 2.7. On peut développer un déterminant par rapport à la j -ième colonne par :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n [A]_{i,j} \text{Cof}_{i,j}(A). \quad (4)$$

On peut développer un déterminant par rapport à la i -ième ligne par :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n [A]_{i,j} \text{Cof}_{i,j}(A). \quad (5)$$

3 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. On définit le déterminant de f par :

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}_E}(f(\mathcal{B}_E)) = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f). \quad (6)$$

⊗ Le déterminant ne dépend du choix de la base.

Proposition 3.1. Un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ est une automorphisme ssi $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas : $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Proposition 3.2. Le déterminant d'une composée est : $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$.

Proposition 3.3. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille quelconque de n vecteurs de E .

- a) Si f est un endomorphisme alors $\det_{\mathcal{B}_E} f(\mathcal{F}) = \det(f) \det_{\mathcal{B}_E} \mathcal{F}$.
- b) On a : $\det_{\mathcal{B}_E} \mathcal{F} \neq 0$ ssi $\mathcal{F}$ est une base de E .