

Chapitre 21 : Séries numériques

Dr Nicolas Provost - PCSI1 - LMB

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un rang fixé.

1 Convergence des séries

1.1 Définition et propriétés générales

Définition. On appelle série toute collection de scalaires $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est appelé le terme général de la série.

On lui associe sa suite de sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par : $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.

On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ admet une limite finie.

Dans ce cas, on note : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ la somme de la série.

On considère également la suite des restes $(R_n)_{n \geq n_0}$ définie par : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \rightarrow_{+\infty} 0$.

⊗ La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. La convergence est toujours une notion à comprendre 'à partir d'un certain rang'.

Proposition 1.1. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont deux séries convergentes alors pour tout scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la série $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge. De plus,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n. \quad (1)$$

⊗ Cette propriété de linéarité nécessite au préalable la convergence des séries.

Proposition 1.2. Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente alors la suite des termes $u_n \rightarrow_{+\infty} 0$.

⊗ La contraposée fournit les séries grossièrement divergente c'est à dire celle qui ont un terme général qui ne tend pas vers 0.

⊗ La réciproque est fausse avec pour exemple la série harmonique : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ qui diverge mais pas grossièrement.

1.2 Exemples de références

Proposition 1.3. On appelle série géométrique les série du type : $\sum_{n \geq 0} q^n$ avec $q \in \mathbb{C}$.

Si $|q| < 1$ alors la série converge.

Si $|q| \geq 1$ alors la série diverge grossièrement.

On dispose de plus de la formule : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ dans le cas de convergence.

Proposition 1.4. On appelle série de Riemann les série du type : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Si $\alpha > 1$ alors la série converge.

Si $\alpha \leq 1$ alors la série diverge.

⊗ Le calcul des valeurs des sommes n'est pas connues en général. On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

⊗ Lorsque $\alpha \in]0, 1]$ la série diverge mais pas grossièrement.

Proposition 1.5. On appelle série télescopique les série du type : $\sum_{n \geq 0} (v_{n+1} - v_n)$.

La série convergent ssi la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ admet une limite finie.

Dans ce cas, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = (\lim_{+\infty} v_n) - v_0$.

2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, les séries sont considérées à termes réels et positifs.

⊗ Les résultats de cette partie déterminent la convergence de la série mais ne fournissent jamais une méthode de calcul de la somme de la série.

Lemme 2.1. Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série à termes positifs.

La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Proposition 2.2 (Comparaison série-intégrale). Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive, décroissante et qui tend vers 0 en $+\infty$. On a :

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt. \quad (2)$$

Donc la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge ssi l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge.

⊗ Ceci permet d'obtenir les cas de convergence des séries de Riemann par comparaison aux intégrales de Riemann.

Proposition 2.3 (Comparaison entre séries). Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont deux séries à termes positifs.

Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

⊗ On rappelle que si $u_n \leq v_n$ APCR, $u_n = o(v_n)$ ou si $u_n \sim v_n$ alors en particulier $u_n = o(v_n)$.

On peut alors appliquer le critère de comparaisons de la nature des séries.

⊗ La contraposée permet de démontrer la nature divergente d'une série à termes positifs.

Proposition 2.4 (Règle d'Alembert). Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si $\lambda < 1$ alors la série converge.

Si $\lambda > 1$ alors la série diverge.

⊗ Dans le cas où $\lambda = 1$, la règle échoue et on ne peut rien dire. Toutes les séries de Riemann fournissent des exemples pour $\lambda = 1$.

3 Séries absolument convergentes

Définition. On dit que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série absolument convergente si la série à termes positifs $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ est une série convergente. On dit également de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est sommable.

Théorème 3.1. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente alors la série converge. De plus :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|. \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

⊗ Dans la pratique, on recherche donc à utiliser les résultats sur les séries à termes positifs en considérant la série des modules.

Théorème 3.2 (Critère spécial des séries alternées). Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite positive décroissante qui tend vers 0 alors la série alternées $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$ est une série convergente.

⊗ Ceci fournit l'exemple de la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ qui est convergente mais pas absolument convergente.