

Chapitre 19 : Analyse asymptotique

Dr Nicolas Provost - PCSII - LMB

1 Comparaison sur les fonctions

On considère dans cette partie des fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On étudie le comportement au voisinage d'un point $a \in I \cup \{\inf I, \sup I\}$ l'adhérence de I .

1.1 Introduction

Définition. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a .

- a) On dit que f est équivalent à g en a et on note $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ si $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow_{x \rightarrow a} 1$.
- b) On dit que f est négligeable devant g en a et on note $f(x) =_{x \rightarrow a} o(g(x))$ si $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow_{x \rightarrow a} 0$.
- c) On dit que f est dominée par g en a et on note $f(x) =_{x \rightarrow a} O(g(x))$ si la fonction f/g est bornée sur un voisinage de a .

- ⊗ L'équivalence des fonctions est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
- ⊗ Le caractère négligeable est une relation transitive mais non réflexive sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Théorème 1.1. Soit f et g deux fonctions équivalentes au voisinage de a .

- a) Si $f > 0$ sur un voisinage de a alors $g > 0$ sur un voisinage de a .
- b) Si $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} l$ alors $g(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} l$.

Proposition 1.2. On dispose des liens entre les relations de comparaison :

- a) Si $f(x) =_{x \rightarrow a} o(g(x))$ alors $f(x) =_{x \rightarrow a} O(g(x))$.
- b) Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ alors $f(x) =_{x \rightarrow a} O(g(x))$.
- c) On a l'équivalence : $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) =_{x \rightarrow a} o(g(x))$.

Proposition 1.3. On dispose des comparaisons de références dans une même classe :

$$\ln^{\alpha_1}(x) =_{+\infty} o(\ln^{\alpha_2}(x)) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2 \quad (1)$$

$$x^{\beta_1} =_{+\infty} o(x^{\beta_2}) \Leftrightarrow \beta_1 < \beta_2 \quad (2)$$

$$e^{\gamma_1 x} =_{+\infty} o(e^{\gamma_2 x}) \Leftrightarrow \gamma_1 < \gamma_2 \quad (3)$$

On dispose des relations de croissances comparées entre les classes :

$$\ln^{\alpha_1}(x) =_{+\infty} o(x^\beta) \text{ si } \beta > 0 \quad (4)$$

$$x^\beta =_{+\infty} o(e^{\gamma x}) \text{ si } \gamma > 0 \quad (5)$$

- ⊗ On peut ramener ces relations au voisinage de 0 et on a alors :

$$x^{\beta_1} =_{x \rightarrow 0} o(x^{\beta_2}) \Leftrightarrow \beta_1 > \beta_2 \text{ et } \ln^\alpha(x) =_{x \rightarrow 0} o(x^\beta) \text{ si } \beta < 0. \quad (6)$$

Proposition 1.4. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $f \leq g \leq h$ et $f(x) \sim_{x \rightarrow a} h(x)$ alors $g(x) \sim_{x \rightarrow a} f(x)$.

1.2 Opérations

Proposition 1.5. Si $f(x) =_{x \rightarrow a} o(h(x))$ et $g(x) =_{x \rightarrow a} o(h(x))$ alors :
pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f(x) + \mu g(x) =_{x \rightarrow a} o(h(x))$.

Proposition 1.6. On dispose de la comparaison des produits :

Si $f_1(x) \sim_{x \rightarrow a} g_1(x)$ et $f_2(x) \sim_{x \rightarrow a} g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \sim_{x \rightarrow a} g_1(x)g_2(x)$.
Si $f_1(x) =_{x \rightarrow a} o(g_1(x))$ et $f_2(x) =_{x \rightarrow a} O(g_2(x))$ alors $f_1(x)f_2(x) =_{x \rightarrow a} o(g_1(x)g_2(x))$.
Si $f_1(x) =_{x \rightarrow a} O(g_1(x))$ et $f_2(x) =_{x \rightarrow a} O(g_2(x))$ alors $f_1(x)f_2(x) =_{x \rightarrow a} O(g_1(x)g_2(x))$.

Proposition 1.7. On dispose de la comparaison des inverses :

On a : $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \sim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$.

On a : $f(x) =_{x \rightarrow a} o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} =_{x \rightarrow a} o\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

On a : $f(x) =_{x \rightarrow a} O(g(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} =_{x \rightarrow a} O\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

⊗ On peut en déduire des comparaisons pour les quotients.

Proposition 1.8. On dispose de la comparaison des puissances $\alpha > 0$:

On a : $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x) \Leftrightarrow f^\alpha(x) \sim_{x \rightarrow a} g^\alpha(x)$.

On a : $f(x) =_{x \rightarrow a} o(g(x)) \Leftrightarrow f^\alpha(x) =_{x \rightarrow a} o(g^\alpha(x))$.

On a : $f(x) =_{x \rightarrow a} O(g(x)) \Leftrightarrow f^\alpha(x) =_{x \rightarrow a} O(g^\alpha(x))$.

⊗ On peut en déduire le passage à une puissance négative.

⊗ Ces règles sont valables uniquement dans le cas où la puissance est une constante.

Par exemple, $(1 + \frac{1}{x})^x \rightarrow_{+\infty} e$ et n'est pas équivalent à $1^x = 1$.

2 Développements limités

On étudie une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ au voisinage d'un point fini a dans l'adhérence de I . Soit $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Généralités

Définition. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a si :

$$f(x) =_{x \rightarrow a} a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + o(x - a)^n, \quad (7)$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des coefficients.

⊗ On notera $P(h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$ la partie polynomiale et le développement s'écrit :

$$DL_n(a) : f(a + h) =_{h \rightarrow 0} P(h) + o(h^n). \quad (8)$$

Le degré de P correspond au plus grand indice $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $a_k \neq 0$ vérifie $\deg(P) \leq n$ l'ordre du développement limité.

Théorème 2.1. Si il existe le développement limité est unique.

Proposition 2.2 (Troncature). Si f admet un développement limité à l'ordre n en a alors il admet des développements à chacun des ordres inférieurs $p < n$.

⊗ Le plus petit indice $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $a_k \neq 0$ s'appelle la valuation du développement. Cet entier $p \leq n$ est unique et vérifie :

$$f(a + h) =_{h \rightarrow 0} a_ph^p + \dots + a_nh^n + o(h^n), \quad (9)$$

avec $a_p \neq 0$. En particulier, on obtient l'équivalence $f(x) \sim_{x \rightarrow a} a_p(x - a)^p$.

2.2 Opérations

Proposition 2.3. Si $f_1(a+h) =_{h \rightarrow 0} P_1(h) + o(h^n)$ et $f_2(a+h) =_{h \rightarrow 0} P_2(h) + o(h^n)$ sont des développements limités à l'ordre n alors pour tous les scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ admet un développement limité à l'ordre n donné par :

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(a+h) =_{h \rightarrow 0} \lambda_1 P_1(h) + \lambda_2 P_2(h) + o(h^n). \quad (10)$$

Proposition 2.4. Si $f_1(a+h) =_{h \rightarrow 0} P_1(h) + o(h^{n_1})$ et $f_2(a+h) =_{h \rightarrow 0} P_2(h) + o(h^{n_2})$ sont des développements limités à l'ordre n_1 respectivement n_2 et de valuation p_1 respectivement p_2 alors le produit admet un développement limité à l'ordre $n = \min(n_1 + p_2, n_2 + p_1)$ donné par :

$$(f_1 f_2)(a+h) =_{h \rightarrow 0} P_1(h) P_2(h) + o(h^n). \quad (11)$$

⊗ Ceci permet de déduire le quotient à l'aide de $\frac{1}{1-u} =_{u \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n u^k + o(u^n)$.

Proposition 2.5. Si f est de classe C^1 au voisinage de a et que f' admet un développement limité à l'ordre n en a de la forme :

$$f'(a+h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_n h^n + o(h^n)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a donné par :

$$f(a+h) = f(a) + b_0 h + b_1 \frac{h^2}{2} + b_2 \frac{h^3}{3} + \dots + b_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + o(h^{n+1}).$$

2.3 Lien entre classe et développement limité

Théorème 2.6 (Taylor-Young). Si f est de classe C^n au voisinage de a alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n). \quad (12)$$

⊗ Réciproquement si f est de classe C^n au voisinage de a et :

$$DL_n(a) \quad f(a+h) =_{h \rightarrow 0} a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n).$$

alors par unicité, on obtient $f^{(k)}(a) = k! a_k$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

⊗ On obtient une technique pour trouver les équations de tangentes ou d'asymptotes mais également leurs positions relatives à la courbe.

2.4 Développements limités usuels en 0

$$\frac{1}{1-x} =_{x \rightarrow 0} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n),$$

$$\exp(x) =_{x \rightarrow 0} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\cos(x) =_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\sin(x) =_{x \rightarrow 0} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\ln(1+x) =_{x \rightarrow 0} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha =_{x \rightarrow 0} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n),$$

$$\text{Arctan}(x) =_{x \rightarrow 0} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}),$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6).$$