

Equations différentielles

Révision de la semaine 7.

Les nombres réels et Suites numériques

Bornes supérieure et inférieure

Définition et exemple. Notation $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Axiome de $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.

$\sup(A) \in A \Leftrightarrow A$ admet un maximum.

$M = \sup(A)$ ssi M est un majorant de A et il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \rightarrow M$.

Approximations

Partie entière. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Approximations décimales par défaut ou par excès.

Parties convexes et parties denses de $\mathbb{R}$.

Caractérisation des intervalles comme les convexes de $\mathbb{R}$.

A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \rightarrow x$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemples de référence

Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Exemple de la suite de Fibonacci.

Détermination de l'expression explicite dans chacun des cas.

Liste de Questions de cours :

- a) Enoncer et démontrer le principe de superposition pour l'ordre 1.
- b) Enoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL1 à coefficients non constants.
- c) Enoncer et démontrer les solutions homogènes d'une EDL2 à coefficients constants sur $\mathbb{C}$.
- d) Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
- e) Montrer que si A est un convexe majoré sans maximum et minoré avec minimum alors $A = [\min A, \sup A[$.
- f) Déterminer une expression explicite de la suite de Fibonacci.

Exercices d'Application du Cours

1. Déterminer les bornes inférieures et supérieures des ensembles suivants :

(a) $A = \left\{ \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 3} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \right\}.$

(b) $B = \left\{ \frac{3p}{2pq+5} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$

(c) $C = \left\{ \frac{p-q}{p+q} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$

2. Déterminer une expression explicite des suites suivantes :

(a) $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$ et $u_0 = -1.$

(b) $v_{n+2} = \frac{v_{n+1}+v_n}{2}$ et $(v_0, v_1) = (0, 1).$

(c) $w_{n+2} = 2(w_{n+1} - w_n)$ et $(w_0, w_1) = (0, 1).$

Devoir libre

1. Le but du problème est de montrer que $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}.$

(a) Montrer que A est un ensemble stable par addition, soustraction et multiplication.

Rmq : On dit que A est un anneau.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (\sqrt{2} - 1)^n.$

Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de A strictement positifs qui tend vers 0.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}.$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = a_n \lfloor x/a_n \rfloor.$

Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de A qui tend vers $x.$

2. On considère deux parties A et B non vides et bornées de $\mathbb{R}.$

Montrer les formules suivantes :

(a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$

(b) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ et $\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$

(c) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$ et $\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B).$

(d) $\sup(A.B) = \max(\sup A, \sup B, \inf A, \inf B).$