DS de Mathématiques n$^{\text{o}}$ 3 - Corrigé

Exercice 1 : a) Il s'agit d'une fraction rationnelle. La $\boxed{\text{décomposition en éléments simples}}$ donne :
$\frac{u^3}{(u+1)(u+2)} = u - 3 + \frac{7u+6}{(u+1)(u+2)} = u - 3 - \frac{1}{u+1} + \frac{8}{u+2}$.
Puis $I_a = \int_0^1 \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{(u+1)(u+2)} = \left[u^2/2 - 3u - \ln(u+1) + 8\ln(u+2)\right]_0^1$.

$$\boxed{I_a = -5/2 + 8\ln(3) - 9\ln(2)}$$

b) On fait une $\boxed{\text{intégration par parties}}$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_b = \int_0^1 v^2 \arctan(v)\ \mathrm{d}v &= \left[\frac{v^3}{3}\arctan v\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{v^3}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \\ &= \left[\frac{v^3}{3}\arctan v\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{v^3}{1+v^2}\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

On simplifie par division euclidienne : $\frac{v^3}{1+v^2} = v - \frac{v}{1+v^2}$. Donc

$$\begin{aligned} I_b &= \left[\frac{v^3}{3}\arctan v\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(v - \frac{v}{1+v^2}\right)\,\mathrm{d}v \\ &= \left[\frac{v^3}{3}\arctan v\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{v^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+v^2)\right]_0^1. \end{aligned}$$

En évaluant aux bornes :

$$I_b = \frac{1}{3}\arctan(1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2.$$

$$\boxed{I_b = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2}$$

c) On $\boxed{\text{passe aux complexes}}$ puis on fait une $\boxed{\text{Intégration par parties}}$:

$$\begin{aligned} I_c = \int_0^{2\pi} te^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} te^{(2+i)t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left[t\frac{e^{(2+i)t}}{(2+i)}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{e^{(2+i)t}}{(2+i)}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{te^{(2+i)t}}{(2+i)} - \frac{e^{(2+i)t}}{(2+i)^2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{2\pi(2+i)}\left(\frac{2\pi}{(2+i)} - \frac{1}{(2+i)^2}\right) + \frac{1}{(2+i)^2}\right) \end{aligned}$$

On a $e^{(2+i)2\pi} = e^{4\pi}e^{i2\pi} = e^{4\pi}$, $\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5}$ et $\frac{1}{(2+i)^2} = \frac{3-4i}{25}$.
On en déduit :

$$I_c = \mathrm{Re}\left(e^{4\pi}\frac{2\pi(2-i)}{5} + (1-e^{4\pi})\frac{3-4i}{25}\right) = e^{4\pi}\left(\frac{4\pi}{5} - \frac{3}{25}\right) + \frac{3}{25}.$$

$$\boxed{I_c = \frac{(20\pi - 3)e^{4\pi} + 3}{25}}.$$

d) On effectue le $\boxed{\text{changement de variable}}$ $\begin{cases} u & = e^x \\ \mathrm{d}u & = e^x \,\mathrm{d}x \end{cases}$

On a $I_d = \int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}} = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x\sqrt{1+e^x}}(e^x \,\mathrm{d}x) = \int_1^3 \frac{1}{u\sqrt{1+u}} \,\mathrm{d}u$.

On effectue désormais le changement de variable $\begin{cases} v & = \sqrt{1+u} \\ \mathrm{d}v & = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{1+u}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u & = v^2-1 \\ \mathrm{d}u & = 2v \,\mathrm{d}v \end{cases}$

$$\begin{aligned} I_d &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4}} \frac{2v \,\mathrm{d}v}{(v^2-1)v} \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2}{(v-1)(v+1)} \,\mathrm{d}v \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1} \,\mathrm{d}v \\ &= [\ln|v-1| - \ln|v+1|]_{\sqrt{2}}^{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{I_d = \ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)}{3(\sqrt{2}-1)}\right)}$$

Exercice 2 : a) On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient non constant et avec second membre C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On recherche une primitive de $a : t \mapsto \frac{-2t}{t^2+1}$. On trouve $A(t) = -\ln(1+t^2)$. Donc les solutions homogènes sont $t \mapsto \lambda e^{A(t)} = \frac{\lambda}{1+t^2}$.

Avec la méthode de Lagrange, on recherche une solution sous la forme $y(t) = \frac{K(t)}{1+t^2}$.
En injectant dans l'équation, on obtient : $(t^2+1)K'(t) + 0 = 1$.
Puis $K'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $K(t) = \arctan(t)$ convient.

Les solutions de l'équation sont $t \mapsto \frac{\arctan(t)+\lambda}{1+t^2}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
Puis la condition $y(0) = \pi$ donne $\lambda = \pi$. Donc

$$\boxed{y(t) = \frac{\arctan(t)+\pi}{1+t^2}}$$

b) On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficient constant. Le second membre peut se décomposer en deux termes $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto e^t$.

Les solutions homogènes sont données par $t \mapsto \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-2t}$ d'après les racines de $\chi = X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$.

Pour t^2, on recherche une solution de la forme $y_1(t) = at^2 + bt + c$. Dans l'équation, on trouve : $2a + (2at+b) - 2(at^2+bt+c) = t^2$. Donc $y_1(t) = -(2t^2+2t+3)/4$.

Puis pour e^t, on recherche une solution de la forme ate^t car 1 est racine simple du polynôme caractéristique. Donc on trouve, l'équation : $[(t+2)+(t+1)-2t]ae^t = e^t$.
Donc $y_2(t) = te^t/3$.

Ainsi on en déduit que $y(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-2t} - (2t^2+2t+3)/4 - te^t/3$.
Donc $y'(t) = \lambda_1 e^t - 2\lambda_2 e^{-2t} - (4t+2)/4 - (t+1)e^t/3$.

Puis les conditions initiale, donnent le système : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3/4 + 0 & = 1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 1/2 - 1/3 & = 1 \end{cases}$.

On en déduit $\lambda_2 = -1/36$ puis $\lambda_1 = 16/9$. Donc :

$$\boxed{y(t) = \frac{16}{9}e^t - \frac{1}{36}e^{-2t} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) + \frac{t}{3}e^t.}$$

Problème I : Partie I : Etude de la réciproque du sinus hyperbolique

1. La fonction sh est continue et strictement croissante (car $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} > 0$) Donc d'après le théorème de la bijection continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\operatorname{sh}(\mathbb{R})$. Or $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$ car sh est impaire. Donc $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
2. On peut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
y = \operatorname{sh}(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \text{ qui est un polynôme du 2nd degré} \\
&\Leftrightarrow e^x \in \{y + \sqrt{y^2+1}, y - \sqrt{y^2+1}\} \text{ car } \Delta = 4y^2 + 4 = (2\sqrt{y^2+1})^2 \\
&\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{1+y^2} > 0 \text{ car la seconde solution est négative} \\
&\Leftrightarrow x = \operatorname{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2})
\end{aligned}$$

3. La fonction sh est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ ne s'annule pas. Donc Argsh est de classe C^∞ sur $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   De plus pour $y = \operatorname{sh}(x) \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{Argsh}'(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.
   car $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
   On pouvait également étudier la fonction $y \mapsto \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ puis la dériver.

Partie II : Simplification d'une expression

1. La fonction $u : x \mapsto 2x\sqrt{1+x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et Argsh est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc la composée $f = \operatorname{Argsh} \circ u$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$ donc $\operatorname{Argsh}(-y) = -\operatorname{Argsh}(y)$.
   La fonction f est donc impaire car $f(-x) = \operatorname{Argsh}(-2x\sqrt{1+(-x)^2}) = -\operatorname{Argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) = -f(x)$.
   La fonction f n'est pas périodique car elle est strictement croissante.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $u'(x) = 2\sqrt{1+x^2} + \frac{(2x)^2}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{4x^2+2}{\sqrt{1+x^2}}$.
   Donc $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2(1+x^2)}} u'(x) = \frac{1}{1+2x^2} \frac{4x^2+2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. En intégrant, on obtient $f(x) = 2\operatorname{Argsh}(x) + C$. Or $f(0) = 0$ donc $C = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Argsh}\big(2x\sqrt{1+x^2}\big) = 2\operatorname{Argsh}(x).}$$

Problème II : Partie I : Méthode de Lagrange

1. La fonction y_h est au moins de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis on a $y_h(x) = \frac{1}{x}, y_h'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $y_h''(x) = \frac{2}{x^3}$. Donc $x^2 y_h''(x) + 3xy_h'(x) + y_h(x) = (2-3+1)\frac{1}{x} = 0$. Ainsi y_h est une solution homogène de (E).
2. On note $y(x) = K(x)y_h(x) = \frac{K(x)}{x}$. Elle est au moins C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$,
   $y'(x) = K'(x)/x - K(x)/x^2$ et $y''(x) = K''(x)/x - 2K'(x)/x^2 + 2K(x)/x^3$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} &= x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) \\
&= [xK''(x) - 2K'(x) + 2K(x)/x] + 3[K'(x) - K(x)/x] + K(x)/x \\
&= xK''(x) + K'(x)
\end{aligned}$$

   Ainsi y est solution de (E) ssi K' est solution de (E_1).
3. L'équation (E_1) : $y'(x) = -\frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x^3}$ est une EDL1 à coefficients non constants $a(x) = -\frac{1}{x}$ de classe C^∞ sur le domaine.

Une primitive de a est $A(x) = -\ln(x)$ donc $\exp(A(x)) = \exp(-\ln(x)) = \frac{1}{x}$ est une solution homogène génératrice de (E_1).

On recherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{L(x)}{x}$. Donc $y_p'(x) = L'(x)/x - L(x)/x^2$ puis $\frac{1}{x^2} = xy_p'(x) + y_p(x) = L'(x)$. On obtient ainsi $L(x) = \frac{-1}{x}$ et $y_p(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Ainsi $y(x) = \frac{\lambda}{x} - \frac{1}{x^2}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. On a vu que y solution de (E) ssi K' solution de (E_1). Donc $K'(x) = \frac{\lambda}{x} - \frac{1}{x^2}$. Puis $K(x) = \lambda \ln(x) + \frac{1}{x} + C$ pour $\lambda, C \in \mathbb{R}$ des constantes. Ainsi

$$\boxed{y(x) = \frac{K(x)}{x} = \lambda \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{C}{x}.}$$

Partie II : Changement de variable

1. La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est de classe C^∞ et $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est au moins de classe C^2. Donc $z = y \circ \exp$ est au moins de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

   Puis $z'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x)$ comme composée.

   Et $z''(t) = (e^t)^2 y''(e^t) + e^t y'(e^t) = x^2 y''(x) + xy'(x)$ comme produit.
2. On a $z''(t) + 2z'(t) + z(t)$
   $= [x^2 y''(x) + xy'(x)] + 2xy'(x) + y(x)$
   $= x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x)$
   $= \frac{1}{x^2} = e^{-2t}$.
3. L'équation $(E_2) : z'' + 2z' + z = e^{-2t}$ est une EDL2 à coefficients constants sur $\mathbb{R}$.

   On a $\chi = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$ donc les solutions homogènes sont $z_h(t) = (at+b)e^{-t}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

   Le second membre est $b(t) = e^{-2t}$. On recherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = ce^{-2t}$. On obtient $e^{-2t} = [(-2)^2 ce^{-2t}] + 2[(-2)ce^{-2t}] + ce^{-2t} = ce^{-2t}$ donc $c = 1$.

   Ainsi les solutions sont $z(t) = (at+b)e^{-t} + e^{-2t}$.
4. On a $t = \ln(x)$ pour $x > 0$. Donc $y(x) = z(\ln x) = (a \ln x + b)e^{-\ln x} + e^{-2\ln x}$ puis :

$$\boxed{y(x) = a\frac{\ln x}{x} + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}.}$$