Devoir Surveillé de Mathématiques n° 3
le samedi 15 Novembre 2025 - durée 3h

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{(u+1)(u+2)}$.

b) $\int_0^1 v^2 \mathrm{Arctan}\,(v)\,\mathrm{d}v$.

c) $\int_0^{2\pi} te^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

d) $\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}$.

Exercice 2 : Résoudre les problème de Cauchy suivants :

a) $\begin{cases} (t^2+1)^2y' + 2t(t^2+1)y = 1 \\ y(0) = \pi \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t^2 - e^t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

Problème I : Partie I : Etude de la réciproque du sinus hyperbolique

1. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   On note Argsh sa bijection réciproque.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}, \mathrm{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.
3. Montrer que Argsh est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{Argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

Partie II : Simplification d'une expression On note $f(x) = \mathrm{Argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Quelle est la classe de la fonction sur ce domaine ?
2. La fonction est-elle paire ou impaire ? Est-elle périodique ?
3. Montrer que $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$ lorsque cela est possible.
4. En déduire une expression simple de f.

Problème II : Le but du problème est de résoudre l'équation à coefficients non constant :

$$(E): \quad x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = \frac{1}{x^2} \text{ pour } x > 0.$$

Les deux parties sont indépendantes :

Partie I : Méthode de Lagrange

1. Montrer que $y_h(x) = \frac{1}{x}$ est un solution homogène.
2. On recherche les solutions sous la forme $y(x) = K(x)y_h(x)$.
   Montrer que y est solution de (E) ssi K' est solution de $(E_1) : xy' + y = \frac{1}{x^2}$.
3. Résoudre l'équation (E_1) sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire les solutions de (E).

Partie II : Changement de variable Pour $x > 0$, on note $t = \ln(x)$ et $z(t) = y(e^t)$.

1. Montrer que z est de classe C^2 et calculer $z'(t)$ et $z''(t)$ à l'aide de $y'(x)$ et $y''(x)$.
2. Montrer que y est solution de (E) ssi z est solution de $(E_2) : z'' + 2z' + z = e^{-2t}$.
3. Résoudre l'équation (E_2) sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.