Densité dans $\mathbb{R}$

Le but du problème est de montrer que $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que A est un ensemble stable par addition, soustraction et multiplication.
   Rmq : On dit que A est un anneau.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (\sqrt{2} - 1)^n$.
   Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de A strictement positifs qui tend vers 0.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = a_n \lfloor x/a_n \rfloor$.
   Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de A qui tend vers x.

1. On considère deux nombres $a = n + m\sqrt{2}$ et $b = p + q\sqrt{2}$ dans A.
   On montre que $a + b = (n + p) + (m + q)\sqrt{2} \in A$ donc stable par addition.
   Puis on a $a - b = (n - p) + (m - q)\sqrt{2} \in A$ donc stable par soustraction.
   Enfin $ab = np + mp\sqrt{2} + nq\sqrt{2} + 2mq = (np + 2mq) + \sqrt{2}(mp + nq) \in A$ donc stable par produit.
2. On en déduit par récurrence immédiate que A est stable par puissance. Or $q = \sqrt{2}-1 \in A$ donc $a_n = q^n \in A$ par puissance. Puis $q > 0$ donc $a_n = q^n > 0$. Enfin $|q| < 1$ alors $\lim_{+\infty} a_n = 0$ en tant que suite géométrique.
3. On sait que $a_n \in A$ donc pour tout $p \in \mathbb{Z}, pa_n \in A$ par opérations. Ainsi $x_n \in A$ avec $p = \lfloor x/a_n \rfloor \in \mathbb{Z}$.
   Par définition de la partie entière $\lfloor x/a_n \rfloor \leq x/a_n < \lfloor x/a_n \rfloor + 1$.
   En multipliant par $a_n > 0$, on obtient $x_n \leq x < x_n + a_n$ puis en décalant l'inégalité de $x - a_n < x_n \leq x$. Or $\lim_{+\infty}(x - a_n) = x$ donc par théorème d'encadrement $\lim_{+\infty} x_n = x$.
   Donc $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ par caractérisation séquentielle.

Calcul sur des bornes supérieures/inférieures

On considère deux parties A et B non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
Montrer les formules suivantes :

1. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
2. $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ et $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
3. $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$ et $\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B)$.
4. $\sup(A.B) = \max(\sup A. \sup B, \inf A. \inf B)$.

les arguments s'adaptent pour montrer les résultat analogue sur les bornes inférieures.

1. On peut supposer sans nuire à la généralité que $\sup A \leq \sup B$.

   On a $\forall a \in A, a \leq \sup A \leq \sup B$ et $\forall b \in B, b \leq \sup B$. Ainsi $\sup B$ majore $A \cup B$.

   Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(b_n)_{n\geq 0} \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \to \sup B$. En particulier $b_n \in A \cup B$, donc la même suite convient à montrer que $\sup(A \cup B) = \sup B = \max(\sup A, \sup B)$.

2. Soit $c \in A + B$ alors $c = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Donc $c = a + b \leq \sup A + \sup B$. En particulier $M = \sup A + \sup B$ majore $A + B$.

   Il existe une suite $a_n \to_{+\infty} \sup A$ avec $a_n \in A$ et une suite $b_n \to_{+\infty} \sup B$ avec $b_n \in B$. En posant $c_n = a_n + b_n$, on obtient $c_n \in A + B$ et $c_n \to_{+\infty} \sup A + \sup B = M$.

   Par caractérisation séquentielle $\sup(A + B) = M = \sup A + \sup B$.

3. Notons désormais $N = \sup(A) - \inf(B)$. Pour $d = a - b \in A - B$, on a $d \leq \sup A - \inf B = N$. Donc N majore $(A - B)$.

   On dispose toujours de $a_n \to \sup A$ et également de $b'_n \to \inf B$ une autre suite d'éléments de B. En posant $d_n = a_n - b'_n \in A - B$, on trouve une suite telle que $d_n \to N$.

   Par caractérisation séquentielle $\sup(A - B) = N = \sup A - \inf B$.

4. Pour $p = ab \in A.B$ un produit d'un élément $a \in A$ et d'un élément $b \in B$. On a $\inf A \leq a \leq \sup A$ et $\inf B \leq b \leq \sup B$.

   1er cas : $\inf A$ est positif alors a et $\sup A$ le sont également. Puis $\inf A \inf B \leq ab \leq \sup A \sup B$. Donc $\sup(A.B) = \sup(A)\sup(B)$ car c'est un majorant limite de la suite $(a_n b_n)_{n\geq 0}$.

   2eme cas : $\sup A$ négatif, on peut écrire $A.B = (-A).(-B)$. On a $\inf(-A) = -\sup A$ positif et on est se ramène au 1er cas. On trouve que $\sup(A.B) = \sup(-A)\sup(-B) = (-\inf A)(-\inf B) = \inf A \inf B$.

   3eme cas : $\inf B$ positif ou $\sup B$ négatif, on peut échanger le rôle de A et B et revenir au 1er ou 2eme cas.

   4eme cas : $\inf A < 0 < \sup A$ et $\inf B < 0 < \sup B$. Notons $M = \max(\sup A. \sup B, \inf A. \inf B)$. Si ($a > 0$ et $b0$) alors $ab \leq \sup A \sup B \leq M$. Si ($a < 0$ et $b < 0$) alors $ab \leq \inf A \inf B \leq M$. Si les deux sont de signes contraires alors $ab \leq 0 \leq M$. Donc M est un majorant et il existe une suite $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ ou $(a'_n b'_n)_{n\geq 0}$ qui tend vers M.

   Donc $\sup(A.B) = M = \max(\sup A. \sup B, \inf A. \inf B)$ dans tous les cas.