Semaine 9 - Du 24 au 28 Novembre 2025

Nombres réels et suites numériques

Révision de la semaine 8

Les notions : "Equivalente $u_n \sim_{+\infty} v_n$" et "Négligeable $u_n \ll_{+\infty} v_n$" n'ont pas été formalisées dans le cours mais peuvent être utilisées dans des cas explicites de limites de suites.

Exemples de référence

Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.
Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Exemple de la suite de Fibonacci.
Détermination de l'expression explicite dans chacun des cas.

Suites convergentes

Définitions avec les quantificateurs et unicité de la limite.
Opérations sur les limites. Limite des fractions rationnelles.
Si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ admettent des limites et $u_n \leq v_n$ APCR alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.
Limite d'un produit d'une suite bornée avec une suite qui tend vers 0.

Théorèmes d'existence

Théorème d'encadrement. Comparaison à des suites divergentes vers $\pm\infty$.
Théorème de la limite monotone.
Théorème des suites adjacentes.
Suites extraites. Critère de divergence sans limite d'une suite.

Liste de Questions de cours :

a) Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

b) Montrer que si A est un convexe majoré sans maximum et minoré avec minimum alors $A = [\min A, \sup A[$.

c) Déterminer une expression explicite de la suite de Fibonacci.

d) Démontrer l'unicité de la limite d'une suite.

e) Démontrer limite d'une combinaison linéaire de deux suites (cas limites finies).

f) Enoncer puis démontrer le théorème de limite monotone pour les suites.

Exercices d'Application du Cours

1. Etudier les suites récurrentes en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$ définie par :
   (a) $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$
   (b) $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$ (avec $u_0 \notin \{0,1\}$)
   (c) $u_{n+1} = \frac{3u_n-1}{u_n+1}$.
2. Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :
   (a) $0 < u_0 < v_0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n+v_n}$.
   (b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Devoir libre

1. On recherche à montrer que la somme harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$.
   On note également $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ la somme harmonique alternée.
   (a) Montrer que pour tout $x > -1, \ln(1+x) \leq x$.
   (b) Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ sont adjacentes.
   (c) En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + \epsilon_n$ avec une constante $\gamma \in]0,1[$ et une suite $\varepsilon_n \to 0$ à préciser.
   (d) Montrer que $S_{2n} = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$.
   (e) En déduire que $S_n \to \ln(2)$.