# DM3 : Suites numériques
# à rendre le jeudi 4 décembre 2025.

**Exercice 1 :** Etudier les suites récurrentes et préciser les valeurs des limites si elles existent.

1. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_{n+1} = 4u_n - 3$ et $u_0 = 2$.
2. $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$ et $v_0 = -v_1 = 2$.
3. $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par $w_{n+2} = w_{n+1} - 2w_n$ et $w_0 = w_1 = 1$.

**Exercice 2 :** On considère les deux suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par leurs premiers termes $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$ ainsi que les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right) \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{a_n}\right).$$

De plus, on note $u_n = a_n b_n$ et $v_n = \frac{a_n}{b_n}$.

1. Montrer que les suites sont bien définies.
2. Montrer que $u_{n+1} = \frac{(u_n+1)^2}{4u_n}$ et que $(v_n)_{n\geq 0}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
4. En déduire les convergences puis les limites des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$.