DM3 - Corrigé

Exercice 1 :

1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmético-géométrique.
   On recherche $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 4l - 3$ d'où $l = 1$.
   Puis la suite $(u_n - 1)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison 4 d'où :
   $u_n - 1 = 4^n(u_0 - 1) = 4^n$. Enfin $u_n = 4^n + 1 \to +\infty$.
2. La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2.
   Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
   D'où $v_n = (an+b)1^n$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.
   Les conditions initiales donnent $b = v_0 = 2$ et $a + b = v_1 = -2$
   donc $u_n = -4n + 2 \to -\infty$.
3. La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2.
   Le polynôme caractéristique est $X^2 - X + 2 = (X - z)(X - \bar{z})$ avec $z = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$.
   Posons $\theta = \text{Arctan}\,(\sqrt{7})$. On a $z = \sqrt{2}e^{i\theta}$.
   D'où $w_n = (\sqrt{2})^n(a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta))$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.
   Les conditions initiales donnent $a = w_0 = 1$ et $\sqrt{2}(a\cos\theta + b\sin\theta) = w_1 = 1$.
   Donc $a = 1$ et $b = \frac{2-a}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.
   La suite diverge sans limite car elle est non majorée et non minorée.

Exercice 2 :

1. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que ($a_n > 0$ et $b_n > 0$).
   Initialisation $a_0 = 2 > 0$ et $b_0 = 1 > 0$.
   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que ($a_n > 0$ et $b_n > 0$). Alors $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right) > 0$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{a_n}\right) > 0$.
   Conclusion Donc les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et strictement positives.
   On en déduit que le produit u_n et le quotient v_n sont également définis.
2. On a $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right)\frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{a_n}\right)$
   $= \frac{1}{4}\left(a_n b_n + 1 + 1 + \frac{1}{a_n b_n}\right)$
   $= \frac{1}{4}\frac{u_n^2 + 2u_n + 1}{u_n}$
   $= \frac{(u_n+1)^2}{4u_n}$.
   Puis $v_{n+1} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right)}{\left(b_n + \frac{1}{a_n}\right)}$
   $= \frac{(a_n b_n + 1)/b_n}{((b_n a_n + 1)/a_n}$
   $= \frac{a_n}{b_n} = v_n$.
   De plus $v_0 = 2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 2$.
3. On pose $f(x) = \frac{(x+1)^2}{4x}$. On a $f(l) = l \Leftrightarrow 4l^2 = (l+1)^2 = l^2 + 2l + 1 \Leftrightarrow l \in \{1, -1/3\}$.
   On regarde l'intervalle $I =]1, 2]$ qui contient $u_0 = a_0 b_0 = 2$. On a $f'(x) = \frac{x^2-1}{4x^2} > 0$ sur I. Donc $f(I) =]f(1), f(2)] =]1, 9/8] \subset I$. Donc I est stable puis la suite est minorée par 1.
   On a f croissante donc (u_n) est monotone et $u_1 = f(2) = \frac{9}{8} < 2 = u_0$ donc la suite est décroissante.
   Ainsi $u_n \to l$ d'après le théorème de la limite monotone et $l = 1$ l'unique point fixe positif.
4. On a $a_n > 0$ et $a_n^2 = u_n v_n$. Donc $a_n = \sqrt{u_n . v_n} \to \sqrt{1.2} = \sqrt{2}$ par opération.
   Puis $b_n = u_n / a_n \to 1/\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ par opération.