

Les suites numériques

Révision de la semaine 9

Application

Méthode d'étude des suites autonomes $u_{n+1} = f(u_n)$.

Extension aux suites complexes

Définition grâce aux modules.

Equivalence de la convergence avec celles des parties réelle et imaginaire.

Unicité de la limite et règle sur les opérations.

Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle

Limite d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Notion de voisinage de $a \in \mathbb{R}$ de la forme $]a - \eta, a + \eta[$ pour $\eta > 0$

et voisinage de $+\infty$ de la forme $]M, +\infty[$ et $-\infty$ de la forme $] - \infty, m[$.

f admet une limite finie implique bornée sur un voisinage.

f admet une limite infinie implique non bornée sur tout voisinage.

Définition et unicité de la limite.

Opérations sur les limites

Sommes, produits, combinaisons linéaires et quotients de limites.

Composition des limites de deux fonctions.

Caractérisation séquentielle de la limite avec l'étude de $f(u_n)$ lorsque $u_n \rightarrow a$.

Théorème d'encadrement

Existence d'une limite finie par un encadrement double sur un voisinage.

Existence d'une limite infinie par minoration ou majoration sur un voisinage.

Liste de Questions de cours :

- a) Démontrer l'unicité de la limite d'une suite.
- b) Démontrer limite d'une combinaison linéaire de deux suites (cas limites finies).
- c) Énoncer puis démontrer le théorème de limite monotone pour les suites.
- d) Démontrer l'équivalence $(z_n \rightarrow l \in \mathbb{C})$ ssi $(\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(l) \text{ et } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(l))$.
- e) Énoncer et démontrer le résultat de composée des limites.
- f) Énoncer puis démontrer le théorème d'encadrement pour les fonctions.

Exercices d'Application du Cours

1. Etudier la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n^2+2}{3u_n}$ et $u_0 = 1$.
2. Etudier les suites définies par $u_{n+1} = u_n^2 v_n$, $v_{n+1} = v_n^2 u_n$, $u_0 = 1/2$ et $v_0 = 1/3$.
3. Etudier la continuité de la fonction $f(x) = \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor}$ et de ses prolongements.

Devoir libre

1. Lemme des Escaliers

- (a) Montrer que si $u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow l$.
- (b) On considère une suite (v_n) telle que $v_{n+1} - v_n \rightarrow l$. Montrer que $\frac{v_n}{n} \rightarrow l$.
- (c) On considère une suite (w_n) strictement positive telle que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \rightarrow l > 0$.
Montrer que $\sqrt[n]{w_n} \rightarrow l$.
- (d) En déduire les limites des suites :

$$\binom{2n}{n}^{1/n}, \quad \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sqrt[n]{1.3.5 \dots (2n-1)}$$