

## Les suites numériques

### Révision de la semaine 9

#### Application

Méthode d'étude des suites autonomes  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

#### Extension aux suites complexes

Définition grâce aux modules.

Équivalence de la convergence avec celles des parties réelle et imaginaire.

Unicité de la limite et règle sur les opérations.

---

## Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle

### Limite d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Notion de voisinage de  $a \in \mathbb{R}$  de la forme  $]a - \eta, a + \eta[$  pour  $\eta > 0$   
et voisinage de  $+\infty$  de la forme  $]M, +\infty[$  et  $-\infty$  de la forme  $]-\infty, m[$ .

$f$  admet une limite finie implique bornée sur un voisinage.

$f$  admet une limite infinie implique non bornée sur tout voisinage.

Définition et unicité de la limite.

#### Opérations sur les limites

Sommes, produits, combinaisons linéaires et quotients de limites.

Composition des limites de deux fonctions.

Caractérisation séquentielle de la limite avec l'étude de  $f(u_n)$  lorsque  $u_n \rightarrow a$ .

#### Théorème d'encadrement

Existence d'une limite finie par un encadrement double sur un voisinage.

Existence d'une limite infinie par minoration ou majoration sur un voisinage.

---

## Liste de Questions de cours :

- a) Démontrer l'unicité de la limite d'une suite.
- b) Démontrer limite d'une combinaison linéaire de deux suites (cas limites finies).
- c) Enoncer puis démontrer le théorème de limite monotone pour les suites.
- d) Démontrer l'équivalence  $(z_n \rightarrow l \in \mathbb{C})$  ssi  $(\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(l))$  et  $(\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(l))$ .
- e) Enoncer et démontrer le résultat de composée des limites.
- f) Enoncer puis démontrer le théorème d'encadrement pour les fonctions.

### Exercices d'Application du Cours

1. Etudier la suite définie par  $u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2}{3u_n}$  et  $u_0 = 1$ .
2. Etudier les suites définies par  $u_{n+1} = u_n^2 v_n$ ,  $v_{n+1} = v_n^2 u_n$ ,  $u_0 = 1/2$  et  $v_0 = 1/3$ .
3. Etudier la continuité de la fonction  $f(x) = \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor}$  et de ses prolongements.

### Devoir libre

1. Lemme des Escaliers

- (a) Montrer que si  $u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  alors  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow l$ .
- (b) On considère une suite  $(v_n)$  telle que  $v_{n+1} - v_n \rightarrow l$ . Montrer que  $\frac{v_n}{n} \rightarrow l$ .
- (c) On considère une suite  $(w_n)$  strictement positive telle que  $\frac{w_{n+1}}{w_n} \rightarrow l > 0$ .  
Montrer que  $\sqrt[n]{w_n} \rightarrow l$ .
- (d) En déduire les limites des suites :

$$\binom{2n}{n}^{1/n}, \quad \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$$