Série harmonique

On recherche à montrer que la somme harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$.

On note également $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ la somme harmonique alternée.

1. Montrer que pour tout $x > -1, \ln(1+x) \leq x$.
2. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ sont adjacentes.
3. En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + \epsilon_n$ avec une constante $\gamma \in]0,1[$ et une suite $\varepsilon_n \to 0$ à préciser.
4. Montrer que $S_{2n} = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$.
5. En déduire que $S_n \to \ln(2)$.

1. Il s'agit d'une inégalité de convexité.
   On peut la démontrer en étudiant la différence $f(x) = \ln(1+x) - x$. La fonction f de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ qui change de signe en 0. Donc f atteint un maximum en $x = 0$. Ainsi pour tout $x > -1, f(x) \leq f(0) = 0$ c'est à dire $\ln(1+x) \leq x$.
2. On peut déjà calculer $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$ par définition de la somme.
   On montre que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   On a $u_{n+1} - u_n$
   $= (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln(n))$
   $= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$ avec $x = -\frac{1}{n+1} > -1$.
   Puis $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   On a $v_{n+1} - v_n$
   $= (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln(n)) - (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n})$
   $= -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \geq 0$ avec $x = \frac{1}{n} > -1$.
   Enfin $u_n - v_n = \frac{1}{n} \to 0$. Donc les suites sont adjacentes.
3. D'après le théorème des suites adjacentes, il existe une limite commune. On la note $\gamma \in \mathbb{R}$. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \gamma \leq u_n$ en particulier $\gamma \in [v_1, u_1] = [0,1]$. On pose alors $\varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma = u_n - \gamma \to 0$ par opération.
4. On veut montrer que $S_{2n} = H_{2n} - H_n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : $n = 0$ est clair car $S_0 = H_0 = 0$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.
   On a $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$
   et $(H_{2n+2} - H_{n+1}) - (H_{2n} - H_n) = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$.
   Ainsi $S_{2n+2} - S_{2n} = (H_{2n+2} - H_{n+1}) - (H_{2n} - H_n)$.
   Donc $S_{2n+2} = H_{2n+2} - H_{n+1}$ car $S_{2n} = H_{2n} - H_n$ par HR.
5. On obtient $S_{2n} = H_{2n} - H_n = [\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}] - [\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n] = \ln(2) + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \to \ln(2)$ par opération.
   Puis $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln(2)$ par opération.
   Donc $S_n \to \ln(2)$ par suites extraites.