

Lemme des Escaliers

1. Montrer que si $u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow l$.
2. On considère une suite (v_n) telle que $v_{n+1} - v_n \rightarrow l$. Montrer que $\frac{v_n}{n} \rightarrow l$.
3. On considère une suite (w_n) strictement positive telle que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \rightarrow l > 0$.
Montrer que $\sqrt[n]{w_n} \rightarrow l$.
4. En déduire les limites des suites :

$$\left(\frac{2n}{n}\right)^{1/n}, \quad \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sqrt[n]{1.3.5 \dots (2n-1)}$$

1. Il s'agit du Lemme de Cesàro.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, |u_n - l| < \varepsilon/2$.

On pose $C = \sum_{k=1}^{N_1-1} |u_k - l|$. Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, |C/n| < \varepsilon/2$.

Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - l \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - l) \right| \text{ car } l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n l \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - l| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &= \frac{C}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1}^n |u_k - l| \text{ par relation de Chasles} \\ &< \varepsilon/2 + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1}^n \varepsilon/2 \text{ par hypothèses} \\ &= \varepsilon/2 + \frac{n - N_1 + 1}{n} \varepsilon/2 \leq \varepsilon \text{ car } \frac{n - N_1 + 1}{n} \leq 1. \end{aligned}$$

2. Il s'agit du Lemme des Escaliers.

On applique le Lemme de Cesàro à $u_n = v_{n+1} - v_n \rightarrow l$.

Donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = \frac{1}{n} (v_{n+1} - v_1) \rightarrow l$.

Puis $\frac{v_n}{n} = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1} (v_n - v_1) + \frac{v_1}{n-1} \right) \rightarrow 1 \times (l + 0) = l$ par opération.

3. On applique le Lemme des Escalier à $v_n = \ln(w_n)$ bien défini car $w_n > 0$.

On a $v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) \rightarrow \ln(l)$ par composition des limites.

Donc $\frac{v_n}{n} \rightarrow \ln(l)$. Or $\sqrt[n]{w_n} = \exp\left(\frac{\ln w_n}{n}\right) = \exp\left(\frac{v_n}{n}\right) \rightarrow \exp(\ln l) = l$.

4. Pour $w_n = \binom{2n}{n} > 0$. On a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \rightarrow 4$.

$$\text{Donc } \sqrt[n]{w_n} = \left[\left(\frac{2n}{n} \right)^{1/n} \rightarrow 4 \right].$$

$$\text{Pour } w_n = \frac{n!}{n^n}, \text{ on a } \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow \frac{1}{e}.$$

car en passant au $\ln$, $-n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim -n \frac{1}{n} \rightarrow -1$.

$$\text{Donc } \sqrt[n]{w_n} = \left[\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e} \right].$$

$$\text{Pour } w_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n^n}, \text{ on a } \frac{w_{n+1}}{w_n} = (2n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow \frac{2}{e}.$$

$$\text{Donc } \sqrt[n]{w_n} = \left[\frac{1}{n} \sqrt[n]{1.3.5 \dots (2n-1)} \rightarrow \frac{2}{e} \right].$$