Semaine 11 - Du 8 au 12 Décembre 2025

Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle

Révision de la semaine 10

Limite à droite et à gauche
Définition avec les voisinages partielles. L'égalité équivaut à l'existence d'une limite simple.
Théorème de la limite monotone.

Continuité en un point $a \in \mathbb{R}$
Définition par la limite finie. Continuité à droite et à gauche.
Prolongement par continuité et par continuité à droite ou à gauche.
Limite de $f(u_n)$ avec $u_n \to a$ et f continue en a.

Opérations sur la continuité
Sommes, produits, combinaisons linéaires de fonctions continue en un point.
Quotient de fonctions continue en un point avec dénominateur non nul en a.
Composition de f continue en a et g continue en $f(a)$.

Continuité sur un segment
Théorème des valeurs intermédiaires.
Application à la recherche de zéro par dichotomie (en Python).
Image d'un intervalle par une fonction continue.
Théorème des bornes atteintes d'une fonction continue sur un segment. (dém. hors programme)
Théorème de la bijection continue

Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes
Notion de voisinage de $l \in \mathbb{C}$ comme la famille des disques ouverts $D_R(l)$, pour $R > 0$.
Equivalence de la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ avec les fonctions $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$ pour l'existence d'une limite, la continuité en un point et la continuité sur un intervalle.

Liste de Questions de cours :

a) Démontrer l'équivalence ($z_n \to l \in \mathbb{C}$) ssi ($\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(l)$).
b) Enoncer et démontrer le résultat de composée des limites.
c) Enoncer puis démontrer le théorème d'encadrement pour les fonctions.
d) Trouver les fonctions f continue en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.
e) Trouver les fonctions f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
f) Enoncer puis démonter le Théorème des Valeurs Intermédiaires sur un segment $[a, b]$.

Exercices d'Application du Cours

1. Etudier la continuité de $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^2 + (\lfloor x \rfloor + 1 - x)^2$.
2. Trouver les applications continues continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = f(x)$.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $p, q \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$.

Devoir libre

1. Soit $f :]0, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1-\cos x}{x}$.
   (a) On définit également $h : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x \sin(x) - 1 + \cos(x)$.
      i. Démontrer que $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.
      ii. En déduire que f se prolonge par continuité en 0.
      iii. Déterminer les variations puis le signe de h.
      iv. En déduire les variations de f.
      v. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ vers $[0, 2/\pi]$.

   (b) On définit désormais la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par :
   $$u_0 = \pi/2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$
      i. Démontrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et est bornée.
      ii. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
      iii. En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite que l'on déterminera.