Prolongement et suite autonome

Soit $f :]0, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1-\cos x}{x}$.

1. On définit également $h : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x\sin(x) - 1 + \cos(x)$.
   (a) Démontrer que $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.
   (b) En déduire que f se prolonge par continuité en 0.
   (c) Déterminer les variations puis le signe de h.
   (d) En déduire les variations de f.
   (e) Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ vers $[0, 2/\pi]$.

2. On définit désormais la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :
$$u_0 \in]0, \pi/2[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$
   (a) Démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et est bornée.
   (b) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

1. (a) On a : $\frac{\sin(t)}{t} = \frac{\sin(t)-\sin(0)}{t-0} \to_{t\to 0} \sin'(0) = 1$.
   (b) On a : $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{2\sin^2(x/2)}{x} = \frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\sin(x/2) \to_{x\to 0} 0$.
   Ainsi la fonction f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 0$.
   (c) La fonction h est dérivable sur $[0, \pi/2]$ par opérations et $h'(x) = x\cos x > 0$ pour $x \in]0, \pi/2[$.
   Donc h est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$. De plus $h(0) = 0$ donc h est positive et s'annule uniquement en 0.
   (d) La fonction f est dérivable sur $]0, \pi/2]$ et $f'(x) = h(x)/x^2 > 0$.
   Ainsi f est strictement croissante.
   (e) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, \pi/2]$, $f(0) = 0$ et $f(\pi/2) = 2/\pi$. D'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ vers $[0, 2/\pi]$.
2. (a) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, \pi/2[$.
   En effet, si $u_n \in]0, \pi/2[$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in]0, 2/\pi[\subset]0, \pi/2[$ car $2/\pi < \pi/2$.
   (b) On étudie la fonction $g(x) = f(x) - x$. On a g dérivable et $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{h(x)-x^2}{x^2}$.
   Le numérateur admet pour dérivée : $h'(x) - 2x = x(\cos x - 2) < 0$ donc décroit et s'annule en 0. Ainsi $g'(x) < 0$ pour $x \in]0, \pi/2]$ et g décroit strictement avec $g(0) = 0$.
   Donc g est négative. Enfin $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$. Donc la suite est décroissante.
   (c) D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie qui vérifie $f(l) = l$. Or l'équation $g(l) = 0$ admet pour unique solution $l = 0$ d'après la stricte décroissance de g.