Version itérée du Théorème de Rolle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
   On suppose que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n telle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^{(k)}(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0.$$

   (a) Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.
   (b) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

1. (a) Par hypothèse, la fonction f s'annule en $a_0 < a_1 < ... < a_n$.

   Pour $0 \leq k < n$, la fonction f est de classe C^1 sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$ et $f(a_k) = f(a_{k+1})$.

   D'après le théorème de Rolle, il existe $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f'(b_k) = 0$.

   Ainsi on a trouvé n réels $b_0 < b_1 < ... < b_{n-1}$ qui annulent f'.

   (b) On montre par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ que $f^{(k)}$ s'annule au moins $(n+1-k)$ fois.

   On a l'initialisation pour $k = 0$ (hypothèse de l'énoncé) et $k = 1$ (question a.)

   Hérédité. Soit $k < n$ et $\alpha_0 < ... < \alpha_{n-k}$ les $(n+1-k)$ racines de $f^{(k)}$. La fonction $f^{(k)}$ est de classe C^{n+1-k} sur $\mathbb{R}$ donc au moins C^1 sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et $f(\alpha_i) = f(\alpha_{i+1})$.

   D'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(\beta_i) = (f^{(k)})'(\beta_i) = 0$.

   On obtient donc $\beta_0 < ... < \beta_{n-k-1}$ qui sont $(n-k)$ racines de $f^{(k+1)}$.

   Conclusion. Pour $k = n$, on a donc l'existence d'une racine de $f^{(n)}$.

2. (a) On a f de classe C^1 sur $[0,1]$ et $f(0) = f(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

   Donc f' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

   (b) On montrer par récurrence sur $k \in [\![1, n[\![$ que $f^{(k)}$ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

   L'initialisation $k = 1$ est vue dans la question a.

   Hérédité. Soit $1 \leq k < n$ et $c \in]0,1[$ une racine de $f^{(k)}$.

   La fonction $g = f^{(k)}$ est de classe C^{n-k} sur $[0,1]$ donc au moins C^1 sur le segment $[0,c]$. De plus $g(0) = f^{(k)}(0) = 0 = f^{(k)}(c) = g(c)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]0,c[$ tel que $g'(d) = 0$. Ainsi $d \in]0,1[$ est une racine de $g' = f^{(k+1)}$.

   Conclusion. Pour $k = n$, on trouve que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.