Semaine 12 - Du 15 au 19 Décembre 2025

Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle

Révisions de la semaine 11

Dérivabilité des fonctions de la variable réelle

Nombres dérivés

Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement.
Développement limité d'ordre 1 en un point et équation de la tangente.
Programmation de la méthode d'Euler pour la résolution numérique d'équation différentielle.

Semi-dérivabilité

Extremum locaux

Si f atteint un extremum local en c alors c est un point critique.
Théorème de Rolle.

Accroissements finis

Théorème des accroissement finis.
Inégalités des accroissement finis.
Lien avec la monotonie stricte et large.
Prolongement de la dérivabilité en un point.

Fonctions lipschitzienne

Si f est lipschitzienne alors f est continue.
Si f est dérivable et f' bornée alors f est lipschitzienne.

Fonctions convexes

Inégalité des trois pentes.
Position relative des tangentes et des cordes.
Lien avec la dérivée seconde dans le cas des fonctions de classe C^2.

Liste de Questions de cours :

a) Trouver les fonctions f continue en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.
b) Trouver les fonctions f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
c) Enoncer puis démonter le Théorème des Valeurs Intermédiaires sur un segment $[a, b]$.
d) Enoncer puis démontrer le Théorème de Rolle (sans utiliser le TAF).
e) Enoncer puis démontrer le Théorème des accroissements finies.
f) Enoncer et démontrer le résultat de prolongement de la dérivabilité.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\sin x} + x$.
   Montrer que f réalise une bijection. Déterminer sur quel domaine f^{-1} est dérivable.
2. Soit f continue sur $[0, 1]$ dérivable sur $]0, 1[$.
   On suppose que $f(0) = 0$ et et que f' ne s'annule pas sur $]0, 1[$.
   Montrer que f est de signe constant sur $]0, 1[$.
3. Etudier la courbure des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ et } g(x) = \frac{\mathrm{ch}\,(x) - 1}{x}.$$

Devoir libre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
   On suppose que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n telle que :

$$\forall k \in [\![0, n - 1]\!], f^{(k)}(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0.$$

   (a) Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.
   (b) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.