Semaine 13 - Du 5 au 9 Janvier 2026

Dérivabilité des fonctions de la variable réelle

Révision de la semaine 12

Calcul matriciel

Opérations sur l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices
Somme, produit par un scalaire et combinaison linéaire.
Produit matriciel de $\mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n_2,n_3}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n_1,n_3}(\mathbb{K})$.
Calcul du produit par coefficients, par colonnes ou par lignes.

Propriétés algébriques
Associativités des trois opérations somme, produit avec un scalaire et produit matriciel.
Distributivité de la somme par rapport au produit matriciel.
Mise en évidence des problèmes de non-commutativité du produit matriciel.

Les matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Puissance d'une matrice carrée. Propriétés $A^{a+b} = A^a A^b$ et $A^{ab} = (A^a)^b$.
Matrice nilpotente et matrice idempotente.
Formule du binôme pour deux matrices qui commutent.

Liste de Questions de cours :

a) Enoncer puis démontrer le Théorème de Rolle (sans utiliser le TAF).
b) Enoncer puis démontrer le Théorème des accroissements finies.
c) Enoncer et démontrer le résultat de prolongement de la dérivabilité.
d) Enoncer et démontrer l'associativité et la distributivité du produit matriciel.
e) Démontrer que pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), M^{a+b} = M^a M^b$ et $M^{ab} = (M^a)^b$.
f) Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent.

DM4 à rendre le Lundi 5 Janvier (rédiger 4 exercices au choix)

1. Calculer les bornes supérieures et inférieurs, si elles existent, de $A = \left\{ \frac{3p}{2pq+5} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
2. Etudier les suites définies par $\begin{cases} u_{n+1} & = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = 2u_n + 3v_n + 1 \\ u_0 = & v_0 = 0 \end{cases}$ à l'aide de $w_n = u_n + v_n$.
3. On considère les suites définies par $u_0 = 1, v_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
   Montrer que le suites sont adjacentes. Préciser leur limite.
4. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{-1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.
5. On considère $f : x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2$ avec $E(x) = \lfloor x \rfloor$.
   Etudier la continuité puis la dérivabilité de f.
6. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.
7. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et strictement décroissante.
   Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique x_n tel que $f(x_n) = x_n^n$.
   Etudier la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.
8. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ tel que $f(0) = f'(0) = f(a) = 0$.
   Montrer qu'il existe une tangente en $c > 0$ à la courbe de f qui passe par l'origine.
9. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)$ pour $x > 0$.
10. Soit f convexe sur $[a, b]$ tel que $f(a) < 0 < f(b)$.
    Montrer qu'il existe un unique c tel que $f(c) = 0$.

Exercices d'Application du Cours

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

DL13 rédiger les 10 exercices du DM4