Devoir Surveillé de Mathématiques n° 4
le samedi 13 Décembre 2025 - durée 3h

Exercice 1 : Déterminer si elles existent les limites des suites suivantes :

a. $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

b. $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{2}{3}\left(v_n + \frac{1}{v_n}\right)$.

c. $w_0 = \frac{1}{2}$ et $w_{n+1} = 1 + \frac{1}{w_n}$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}.$$

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*, f(nx) = \frac{1}{n}f(x)$.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}_+^*, f(rx) = \frac{1}{r}f(x)$.

c. En déduire les fonctions f solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 : Soit $n \geq 3$ un entier. On définit $f_n(x) = x - n\ln x$ lorsque cela est possible.

a. Etudier les variations de f_n sur son ensemble de définition.

b. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]1, 2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

c. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est monotone.

d. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Problème I : On recherche à déterminer une expression explicite des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 1, v_0 = 0, u_{n+1} = 2u_n + 3v_n + 2^n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + v_n.$$

On propose deux méthodes **indépendantes** de résolution.

Méthode 1 : Changements d'inconnues.

On pose $\alpha_n = \frac{u_n+v_n}{2^n}$ et $\beta_n = \frac{2u_n-3v_n}{2^n}$.

1) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est arithmético-géométrique. Déterminer une expression explicite de α_n.
2) Déterminer une expression explicite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 0}$.
3) Calculer les limites si elles existent des suites $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}$.
4) En déduire les expressions explicites de u_n et v_n.

Méthode 2 : Elévation de l'ordre de la récurrence.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} - 4u_n = 2^n$.
2) Déterminer une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que $x_n = a2^n$ vérifie $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = 2^n$.
3) Montrer que $(u_n - x_n)_{n\geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
4) En déduire une expression explicite de $(u_n)_{n\geq 0}$.
5) En déduire une expression explicite de $(v_n)_{n\geq 0}$.

Question Commune :

1) Calculer les limites si elles existent des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.
2) Montrer que la limite du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ est finie.