DS n° 4 - Corrigé

Exercice 1 : a. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2.

Le polynôme caractéristique est : $X^2 - X + \frac{1}{2} = (X-z)(X-\bar{z})$ avec $z = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}$.

D'où $u_n = (\sqrt{2}/2)^n(a\cos(n\pi/4) + b\sin(n\pi/4))$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Les conditions initiales donnent $\begin{cases} 1 = u_0 & = a \\ 1 = u_1 & = \frac{\sqrt{2}}{2}(a\cos(\pi/4) + b\sin(\pi/4)) \end{cases}$

Donc $a = 1$ et $b = 0$. Puis $u_n = (\sqrt{2}/2)^n\left[\cos(n\pi/4) + \sin(\pi/4)\right]$.

La suite tend vers 0 car $|u_n| \leq 2(\sqrt{2}/2)^n \to 0$.

b. On définit $f(x) = \frac{2}{3}(x + 1/x)$ et $g(x) = f(x) - x$.

On recherche les points fixes : $g(x) = -x/3 + 2/(3x) = -(x^2-2)/(3x)$. Ainsi les points fixes sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

La fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{2}{3}(1 - 1/x^2)$. Donc f est croissante sur $[1, \sqrt{2}]$. Donc $f([1, \sqrt{2}[) = [f(1), f(\sqrt{2})[= [4/3, \sqrt{2}[\subset [1, \sqrt{2}[$ est un intervalle stable.

Enfin $v_{n+1} - v_n = g(u_n) = -(u_n^2 - 2)/(3u_n) > 0$ car $u_n < \sqrt{2}$.

Donc la suite est croissante et majorée. Elle admet un limite $l \in [1, \sqrt{2}]$ par le théorème de convergence monotone. Puis la condition $f(l) = l$ impose $l = \sqrt{2}$.

c. On note $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. La fonction est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est un intervalle stable. Puis $w_{n+2} = f(f(w_n))$ avec $f \circ f$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc les suites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) sont monotones.

On peut calculer $w_0 = 1/2, w_1 = 3, w_2 = 4/3$ et $w_3 = 7/4$. Ainsi $w_0 < w_2$ et la suite (w_{2n}) est croissante. Puis $w_1 > w_3$ donc la suite (w_{2n+1}) est décroissante.

On en déduit que ces deux suites extraites convergent chacune vers des limites finies qui sont des points fixes de $f \circ f$.

On a $f(f(l)) = l$ ssi $l = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{l}}$ ssi $l\left(1 + \frac{1}{l}\right) = \left(1 + \frac{1}{l}\right) + 1$

ssi $l = 1 + \frac{1}{l}$ ssi $l^2 - l - 1 = 0$ ssi $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ ou $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.

Ainsi $w_{2n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $w_{2n+1} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc la suite entière tend vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

Exercice 2 : a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Pour $n = 1, f(1.x) = \frac{1}{1}f(x)$ est trivial.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(nx) = \frac{1}{n}f(x)$.

Dans la relation de l'énoncé, on prend $y = nx$, on obtient :

$f((n+1)x) = f(x + nx) = \frac{f(x)f(nx)}{f(x)+f(nx)} = \frac{(1/n)f(x)^2}{[1+(1/n)]f(x)}$

$= \frac{1/n}{(n+1)/n}f(x) = \frac{1}{n+1}f(x)$.

Conclusion. Pour tout $n > 0, f(nx) = \frac{1}{n}f(x)$.

b. Soit $r = p/q \in \mathbb{Q}_+^*$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

On a $f(rx) = f\left(p.\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{p}f\left(\frac{x}{q}\right)$ et $f(x) = f\left(q.\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q}f\left(\frac{x}{q}\right)$ d'après a).

Donc le quotient donne $\frac{f(rx)}{f(x)} = \frac{q}{p} = \frac{1}{r}$ càd $f(rx) = \frac{1}{r}f(x)$.

c. On pose $A = f(1)$. Pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$, on a $f(r) = f(r.1) = \frac{1}{r}f(1) = \frac{A}{r}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une suite de rationnelle $x_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor \to x$.

Or $x > 0$ donc il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, x_n > 0$

Pour $n \geq N, f(x_n) = \frac{A}{x_n} \to \frac{A}{x}$. Donc par continuité de f en x, on a $f(x) = \frac{A}{x}$.

La synthèse donne $\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)} = \frac{A^2/(xy)}{A/x+A/y} = \frac{A}{x+y} = f(x+y)$ toujours vraie. Donc pour tout $A > 0$ et $f(x) = \frac{A}{x}$ vérifie l'équation fonctionnelle et la condition de continuité.

Exercice 3 : a. La fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0, f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x}$. Donc f_n

est strictement croissante sur $[n,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,n]$.

b. La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]1,2[\subset]0,n]$ car $n\geq 3$. De plus $f_n(1)=1>0$ et $f_n(2)=2-n\ln(2)\leq 2-3\ln(2)<0$. Donc d'après le théorème de la bijection continue 0 admet un unique antécédent dans l'intervalle $]1,2[$.

c. On sait que $x_{n+1}-(n+1)\ln(x_{n+1})=0$. Donc $f_n(x_{n+1})=x_{n+1}-n\ln(x_{n+1})=\ln(x_{n+1})>\ln(1)=0$ est positif.

Puis $f_n(x_{n+1})>0=f_n(x_n)$ avec f_n strictement décroissante donc $x_{n+1}<x_n$. Ainsi $(x_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

d. On sait que $(x_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, $x_n\to l\in[1,x_3]$.
Puis la définition, donne $x_n=n\ln(x_n)$. Donc $\ln(x_n)=\frac{x_n}{n}\to 0$ par opération.
Enfin $x_n=\exp(\ln x_n)\to\exp(0)=1$ car la fonction exp est continue en 0.

Problème I : Méthode 1 :

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a : $\alpha_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{4u_n+4v_n+2^n}{2^{n+1}}=2\frac{u_n+v_n}{2^n}+\frac{1}{2}=2\alpha_n+\frac{1}{2}$.
Puis recherchons $\alpha\in\mathbb{R}$ le point fixe $\alpha=2\alpha+\frac{1}{2}$ donne $\alpha=-1/2$.
La condition initiale est $\alpha_0=\frac{u_0+v_0}{2^0}=1$. La suite est $\alpha_n=2^n(\alpha_0-\alpha)+\alpha=\frac{3}{2}2^n-\frac{1}{2}$.
2. De même, $\beta_{n+1}=\frac{2u_{n+1}-3v_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{-2u_n+3v_n+2^{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{-\beta_n}{2}+1$.
Le point fixe $\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\beta=-\beta/2+1$ est $\beta=2/3$.
La condition initiale est $\beta_0=\frac{2u_0-3v_0}{2^0}=2$.
Donc $\beta_n=(-1/2)^n(\beta_0-\beta)+\beta=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$.
3. On a $2^n\to+\infty$ et $\left(-\frac{1}{2}\right)^n\to 0$. Donc par opération, $\alpha_n\to+\infty$ et $\beta_n\to 2/3$.
4. On résout le système $\begin{cases}u_n+v_n &=2^n\alpha_n\\ 2u_n-3v_n &=2^n\beta_n\end{cases}$.
On obtient $u_n=\frac{3.2^n\alpha_n+2^n\beta_n}{5}$ et $v_n=\frac{2.2^n\alpha_n-2^n\beta_n}{5}$.
Donc trouve $\boxed{u_n=\frac{9}{10}4^n+\frac{4}{15}(-1)^n-\frac{1}{6}2^n}$ et $\boxed{v_n=\frac{3}{5}4^n-\frac{4}{15}(-1)^n-\frac{1}{3}2^n}$.

Méthode 2 :

1. On a $u_{n+2}=2u_{n+1}+3v_{n+1}+2^{n+1}=2u_{n+1}+3(2u_n+v_n)+2^{n+1}$
$=2u_{n+1}+6u_n+3v_n+2^{n+1}=2u_{n+1}+6u_n+(u_{n+1}-2u_n-2^n)+2^{n+1}$
$=3u_{n+1}+4u_n+2^n$. Donc $u_{n+2}-3u_{n+1}-4u_n=2^n$.
2. On recherche une solution $x_n=a2^n$. On obtient $2^n=x_{n+2}-3x_{n+1}-4x_n$
$=a(4-3.2-4)2^n=-6a2^n$, on trouve $a=\frac{-1}{6}$ qui convient.
3. Notons $w_n=u_n-x_n$. On a $w_{n+2}-3w_{n+1}-4w_n=[u_{n+2}-3u_{n+1}-4u_n]-[x_{n+2}-3x_{n+1}-4x_n]=2^n-2^n=0$. Donc (w_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
4. On a $\chi(X)=X^2-3X-4=(X+1)(X-4)$ donc $w_n=\lambda_1 4^n+\lambda_2(-1)^n$. Puis $u_n=\lambda_1 4^n+\lambda_2(-1)^n-\frac{1}{6}2^n$ avec $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ à déterminer.
Les conditions initiales sont $u_0=1$ et $u_1=2u_0+3v_0+2^0=3$.
On obtient le système $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 &=1+\frac{1}{6}\\ 4\lambda_1-\lambda_2 &=3+\frac{1}{3}\end{cases}$. On trouve $\lambda_1=\frac{9}{10}$ et $\lambda_2=\frac{4}{15}$.
5. On a $3v_n=u_{n+1}-2u_n-2^n$ d'après la relation de récurrence.
Donc $v_n=\frac{1}{3}\left(\lambda_1(4^{n+1}-2.4^n)+\lambda_2((-1)^{n+1}-2(-1)^n)+a(2^{n+1}-2.2^n)-2^n\right)$
Ainsi $v_n=\frac{3}{5}4^n-\frac{4}{15}(-1)^n-\frac{1}{3}2^n$ après simplification.

Question commune

1. Par croissance comparée, on a $(-1)^n=o(2^n)$ et $2^n=o(4^n)$.
Donc $u_n\sim\frac{9}{10}4^n\to+\infty$ et $v_n\sim\frac{3}{5}4^n\to+\infty$.
2. Par quotient, on a $\frac{v_n}{u_n}\sim\frac{\frac{3}{5}4^n}{\frac{9}{10}4^n}\to\frac{2}{3}$