TD 12 - Corrigé

12.1 Exercice formel

Exo 1 : On a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$ car l'univers de chacune des indicatrices est $\{0, 1\}$.

Puis $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}((\mathbb{1}_A = 1) \cap (\mathbb{1}_B = 1) \cap (\mathbb{1}_C = 1)) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4$.

On a $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}((\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C) \in \{(0, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 0)\})$
$= \mathbb{P}(\bar{A} \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B} \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap \bar{C})$ car ils sont deux à deux disjoints
$= (\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) + (\mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) + (\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C))$
$= (1/3 - 1/4) + (1/4 - 1/4) + (1/3 - 1/4) = 1/6$.

Puis $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}((\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_C) \in \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\})$
$= \mathbb{P}(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$
$= (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) + (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) +$
$(\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C))$
$= (1/2 - 1/3 - 1/4 + 1/4) + (5/12 - 1/3 - 1/3 + 1/4) + (5/12 - 1/3 - 1/4 + 1/4) = 1/4$.

Enfin $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X \neq 0) = 1 - 1/4 - 1/6 - 1/4 = 1/3$.

Donc la loi de variable aléatoires est donnée par :

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$\mathbb{P}_X$	1/3	1/4	1/6	1/4

Exo 2 : On a $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.

Puis $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}((\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = (0, 1)) = \overbrace{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B)}^{A \text{ et } B \text{ indépendants}} = (1 - p)p$.

De même $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}((\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = (1, 0)) = \overbrace{\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B})}^{A \text{ et } B \text{ indépendants}} = p(1 - p)$.

Enfin $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y \neq 0) = 1 - 2p(1 - p) = p^2 + (1 - p)^2$.

Par indépendance de A et B, on a $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)\mathbb{E}(\mathbb{1}_B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = p^2$. Ainsi Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p^2 (son espérance).
Puis $\mathbb{P}(Z = 0) = 1 - p^2$ et $\mathbb{P}(Z = 1) = p^2$.

Exo 3 : **a)** On recherche $1 = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X\{k\} = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n ak(n + 1 - k)$
$= a(n + 1) \sum_{k=1}^n k - a \sum_{k=1}^n k^2 = a(n + 1)\frac{n(n+1)}{2} - a\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$= \frac{an(n+1)}{6}[3(n + 1) - (2n + 1)] = a\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = a\binom{n+2}{3}$.
Donc on pose $a = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}$.

b) L'indication de symétrie consiste à utiliser :
$\mathbb{P}(X = n + 1 - k) = a(n + 1 - k)[n + 1 - (n + 1 - k)] = \mathbb{P}(X = k)$.
Donc $Y = n + 1 - X$ est une variable aléatoire qui suit la même loi que X car
$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n + 1 - k) = \mathbb{P}(X = k)$.
Ainsi $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(n + 1 - X) = n + 1 - \mathbb{E}(X)$ par linéarité.
On en déduit en résolvant cette dernière équation $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
Remarque : La question peut être faite sans utiliser l'indication de manière plus calculatoire :
On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n ak(n + 1 - k).k = a(n + 1) \sum_{k=1}^n k^2 - a \sum_{k=1}^n k^3$
$= a(n + 1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - a\frac{n^2(n+1)^2}{4} = ... = \frac{n+1}{2}$.

c) D'après le Théorème de transfert, on a :
$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{n} ak(n+1-k).\frac{1}{k} = a\sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = a\sum_{l=1}^{n} l$ par changement d'indices $l = n+1-k$ Puis $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = a\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{n+2}$.

Exo 4 : **a)** On calcul $\mathbb{P}(X=k+1)/\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$
$= \frac{k!(n-k)!p}{(k+1)!(n-k-1)!(1-p)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$.
Donc $\mathbb{P}(X=k) \leq \mathbb{P}(X=k+1) \Leftrightarrow (k+1)(1-p) \leq (n-k)p \Leftrightarrow k+1 \leq (n+1)p$.
Ainsi pour la partie entière supérieure $K_0 = \lceil (n+1)p \rceil$. On a $\mathbb{P}(X=K_0-1) \leq \mathbb{P}(X = K_0) \geq \mathbb{P}(X=K_0+1)$ et $(X=K_0)$ est l'évènement élémentaire le plus probable.

b) D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{1}{k+1}$
$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\frac{1}{(n+1)p}p^{k+1}(1-p)^{n-k}$
$= \frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p}\left((p+1-p)^{n+1} - \binom{n+1}{0}p^0(1-p)^{n+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$.

c) D'après le théorème de transfert :
$\mathbb{E}(3^X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1/2)^k(1/2)^{n-k}3^k = 2^{-n}(3+1)^n = 2^n$.

Exo 5 : **a)** D'après le cours on a $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
Puis $\overbrace{\mathbb{E}(X^3) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)k^3}^{\text{Thm de transfert}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n} = \frac{n(n+1)^2}{4}$.
Et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1+X^2) = 1+\mathbb{E}(X^2) = 1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{2n^2+3n+7}{6}$.

b) On a $Cov(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right] = \mathbb{E}\left[XY - \mathbb{E}(Y)X - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right]$
$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ par linéarité de l'espérance.
$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X+X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{2} + \frac{n(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)(2n^2+3n+7)}{12}$
$= \frac{n+1}{12}\left[6+3(n^2+2n+1)-(2n^2+3n+7)\right] = \frac{(n+1)(n^2+3n+2)}{12} = \frac{(n+1)^2(n+2)}{12}$.

Puis $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X^2+1) = \mathbb{V}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X^2)^2$
$= \frac{1}{n}\left(n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30\right) - ((n+1)(2n+1)/6)^2$
$= \left(n^4/5 + n^3/2 + n^2/3 - 1/30\right) - \left(n^4/9 + n^3/3 + 13n^2/36 + n/6 + 1/36\right)$
$= 4n^4/45 + n^3/6 - n^2/36 - n/6 + 1/180$.

c) On a $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = Cov(X,Y) = \frac{(n+1)^2(n+2)}{12} \neq 0$. Or si les variables étaient indépendantes $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $Cov(X,Y) = 0$.

12.2 Modélisation

Exo 6 : **a)** Méthode dénombrement :
On note $\Omega = \mathcal{P}_2(\llbracket 1,n \rrbracket)$ l'univers de l'expérience. En effet pour un aléa $\omega = \{b_1, b_2\}$ avec $b_1 \neq b_2$, on a $X(\omega) = max(b_1,b_2)$.
Puis : $(X \leq k) = \{\{b_1,b_2\} \in \Omega \text{ tel que } max(b_1,b_2) \leq k\} = \mathcal{P}_2(\llbracket 1,k \rrbracket)$.
Donc $\mathbb{P}(X \leq k) = \frac{\text{Card }(X\leq k)}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$.

Méthode conditionnement :
On note B_1 la première est inférieur à k et B_2 la seconde est inférieure à k.
On a $(X \leq k) = B_1 \cap B_2$ et d'après la formule des probabilités composées :
$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{k}{n}.\frac{k-1}{n-1}$ d'après l'équipartition sur un tirage simple.

b) Pour $k \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X\leq k) - \mathbb{P}(X<k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)$
$= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$.

Exo 7 : On note $\Omega = \mathcal{P}_k(\llbracket 1,n \rrbracket)$ avec $\omega = \{r_1,...,r_k\}$ l'ensemble des rangs où l'on tire une boule

blanche.
La variable $X(\omega) = max(r_1, ..., r_k)$ est le plus grand de ces rangs.
Pour $\alpha \in X(\omega) = [\![k, n]\!]$, on a $(X \leq \alpha) = \{\omega = \{r_1, ..., r_k\} \text{ avec } r_i \leq \alpha\} = \mathcal{P}_k([\![1, \alpha]\!])$.
Donc $\mathbb{P}(X \leq \alpha) = \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{n}{k}}$.
Puis $\mathbb{P}(X = \alpha) = \mathbb{P}(X \leq \alpha) - \mathbb{P}(X \leq \alpha - 1) = \frac{\binom{\alpha}{k} - \binom{\alpha-1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{\alpha-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(\alpha-1)!(n-k)!k}{n!(\alpha-k)!}$.

On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{\alpha \in X(\omega)} \mathbb{P}(X = \alpha)\alpha = \sum_{\alpha=k}^{n} \frac{(\alpha-1)!(n-k)!k}{n!(\alpha-k)!}\alpha$

$= \sum_{\alpha=k}^{n} \overbrace{\frac{\alpha!}{(\alpha-k)!}}^{\text{dépend de } \alpha} \frac{(n-k)!k}{n!} = \overbrace{\frac{(n-k)!k!k}{n!}}^{\text{ne dépend pas de } \alpha} \sum_{\alpha=k}^{n} \binom{\alpha}{k} = \frac{k}{\binom{n}{k}} \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)k}{k+1}$.

On a utilisé la formule de la somme d'une colonne du triangle de Pascal :

$$\sum_{\alpha=k}^{n} \binom{\alpha}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Elle se démontre par récurrence sur $n \geq k$.

Exo 8 : Il y a n tirages avec remises donc $n-1$ changements possibles mutuellement indépendants.
Chaque changement à $p = 2/3$ de réussite et $1 - p = 1/3$ d'échouer (retirer la même boule sur les trois).
Donc X compte le nombre de succès sur les $n-1$ changements possibles : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, 2/3)$.
Ainsi $X(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ et $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n-1}{k}(2/3)^k(1/3)^{n-1-k} = \binom{n-1}{k}2^k/3^{n-1}$.
Puis $\mathbb{E}(X) = (n-1)(2/3) = \frac{2(n-1)}{3}$ et $\mathbb{V}(X) = (n-1)(2/3)(1/3) = \frac{2(n-1)}{9}$.

Exo 9 : **a)** On note X_A et X_B le nombre de piles de chaque joueur. Les variables aléatoire X_A et X_B sont indépendantes et suivent une même loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$ car on peut supposé les pièces équilibrées.
On recherche $\mathbb{P}(X_A = X_B) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_A = k)\mathbb{P}_{(X_A=k)}(X_B = k)$ d'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements incompatibles $\{(X_A = k)\}_{0 \leq k \leq n}$.
$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_A = k)\mathbb{P}(X_B = k)$ par indépendance.
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1/2)^k(1/2)^{n-k}\binom{n}{k}(1/2)^k(1/2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 2^{-2n}$
$= 2^{-2n}\binom{2n}{n}$.

b) On note $Y = X_A - X_B$ l'écart algébrique du nombre de piles.
On a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_A) - \mathbb{E}(X_B) = 0$ par linéarité et car X_A et X_B suivent la même loi.
Puis $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_A) + \mathbb{V}(-X_B) = \mathbb{V}(X_A) + \mathbb{V}(X_B) = 2n(1/2)(1 - 1/2) = n/2$ d'après le théorème de Pythagore en utilisant l'indépendance des deux variables.

Exo 10 : **a)** La règle de l'énoncé fournit $X(\Omega) = [\![1, 16]\!]$ et $\mathbb{P}(X = k) = 2\mathbb{P}(X = k + 1)$.

Donc la suite des probabilités suit une progression géométrique de raison $1/2$ et $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 1)2^{-k+1}$ pour tout $1 \leq k \leq 16$.
Puis la condition unitaire donne $1 = \sum_{k=1}^{16} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = 1)2^{-k+1} = \mathbb{P}(X = 1)\frac{1-(1/2)^{16}}{1-(1/2)}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1/2}{1-(1/2)^{16}} = \frac{2^{15}}{2^{16}-1}$ et $\mathbb{P}(X = k) = \frac{2^{16-k}}{2^{16}-1}$.

b) On considère le polynôme $P(t) = \sum_{k=1}^{16} \mathbb{P}(X = k)t^k$, on a $P(1) = 1, P'(1) = \mathbb{E}(X)$ et $P''(1) = \sum_{k=0}^{16} \mathbb{P}(X = k)k(k-1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.

Puis l'expression de la loi donne : $P(t) = \sum_{k=1}^{16} \frac{2^{16-k}t^k}{2^{16}-1} = \frac{2^{16}}{2^{16}-1} \sum_{k=1}^{16} (t/2)^k$
$= \frac{2^{16}}{2^{16}-1}(t/2)\frac{1-(t/2)^{16}}{1-(t/2)} = \frac{(2^{16}-t^{16})t}{(2^{16}-1)(2-t)}$.

On peut utiliser la formule de Taylor-Young pour trouver :
$P(1+h) =_{h\to 0} P(1) + P'(1)h + P''(1)\frac{h^2}{2} + o(h^2)$.

On a ainsi $P(1+h) = \frac{(2^{16}-(1+h)^{16})(1+h)}{(2^{16}-1)(1-h)}$
$=_{h\to 0} \frac{2^{16}-1-16h-\binom{16}{2}h^2+o(h^2)}{2^{16}-1}(1+h)(1+h+h^2+o(h^2))$
$=_{h\to 0} \frac{(2^{16}-1)-16h-136h^2+o(h^2)}{2^{16}-1}(1+2h+2h^2+o(h^2)) =_{h\to 0} \frac{(2^{16}-1)+(2^{17}-18)h+(2^{17}-170)h^2+o(h^2)}{2^{16}-1}$.
Puis par unicité du DL, on a $P(1) = \frac{2^{16}-1}{2^{16}-1} = 1, P'(1) = \frac{2^{17}-18}{2^{16}-1}$ et $P''(1) = 2\frac{2^{17}-170}{2^{16}-1}$.
Ainsi $\mathbb{E}(X) = \frac{2^{17}-18}{2^{16}-1}$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = P''(1) + P'(1) - P'(1)^2 = \frac{2^{33}-292.2^{16}+34}{(2^{16}-1)^2}$.

Exo 11 : On suppose par l'absurde qu'il existe D_1, D_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,6]\!]$ tels que $S = D_1 + D_2$ suit une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.
On note $P_1(t) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(D_1 = k)t^k, P_2(t) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(D_2 = k)t^k$ des polynômes à coefficients dans $[0,1]$.
On a $P_1(t)P_2(t) = \sum_{k_1=1}^{6}\sum_{k_2=1}^{6} \mathbb{P}(D_1 = k_1)\mathbb{P}(D_2 = k_2)t^{k_1+k_2} = \sum_{s=2}^{12} \mathbb{P}(S = s)t^s$
$= \sum_{s=2}^{12} \frac{1}{11}t^s = \frac{t^2}{11}\frac{t^{11}-1}{t-1} = \frac{t^2}{11}\prod_{\omega\in\mathbb{U}_{11}-\{1\}}(X-\omega)$.
Donc les racines de P_1 sont parmi celles de $P_1 \times P_2$ càd 0 et $\{\exp(2ik\pi/11)$ pour $1 \le k \le 10\}$.
On a 0 est racine simple et donc il y a 5 autres racines complexes par degré. Ceci est absurde car le polynôme est à coefficients réels donc les racines complexes sont comptées par paires avec leurs conjugués.

Exo 12 : **a)** Les variables X et Y sont indépendantes et suivent des loi uniformes.
On a : $\mathbb{P}(X > U) = \mathbb{P}(X > \sup(X,Y)) = 0$
Puis on considère $1 \le x \le m \le 3$ et on calcul $\mathbb{P}((X,U) = (x,m))$:
$\mathbb{P}((X,U) = (1,1)) = \mathbb{P}((X,Y) = (1,1)) = \frac{1}{9}$.
$\mathbb{P}((X,U) = (1,2)) = \mathbb{P}((X,Y) = (1,2)) = \frac{1}{9}$.
$\mathbb{P}((X,U) = (1,3)) = \mathbb{P}((X,Y) = (1,3)) = \frac{1}{9}$.
$\mathbb{P}((X,U) = (2,2)) = \mathbb{P}((X,Y) \in \{(2,1);(2,2)\}) = \frac{2}{9}$.
$\mathbb{P}((X,U) = (2,3)) = \mathbb{P}((X,Y) = (2,3)) = \frac{1}{9}$.
$\mathbb{P}((X,U) = (3,3)) = \mathbb{P}((X,Y) \in \{(3,1);(3,2);(3,3)\}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

b) On retrouve bien $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,2,3\})$.
Et $\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}((X,U) = (1,1)) = \frac{1}{9}$,
$\mathbb{P}(U = 2) = \mathbb{P}((X,U) = (1,2)) + \mathbb{P}((X,U) = (2,2)) = \frac{1}{3}$,
$\mathbb{P}(U = 3) = \mathbb{P}((X,U) = (1,3)) + \mathbb{P}((X,U) = (2,3)) + \mathbb{P}((X,U) = (3,3)) = \frac{5}{9}$.

c) D'après le cours, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1+3}{2} = 2$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{3^2-1}{12} = \frac{2}{3}$.
Puis $\mathbb{E}(U) = 1\mathbb{P}(U = 1) + 2\mathbb{P}(U = 2) + 3\mathbb{P}(U = 3) = \frac{22}{9}$.
Et $\mathbb{E}(U^2) = 1^2\mathbb{P}(U = 1) + 2^2\mathbb{P}(U = 2) + 3^2\mathbb{P}(U = 3) = \frac{58}{9}$.
Donc d'après la formule de Koënig-Huygens $\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = \frac{38}{81}$.

Exo 13 : On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $X \ge k$ signifie que les k premiers lancés sont des faces. Donc $\mathbb{P}(X \ge k) = q^k$.
Puis $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \ge k) - \mathbb{P}(X \ge k+1) = q^k - q^{k+1} = (1-q)q^k = pq^k$ est la loi de X.
Remarque : La loi de X est bien unitaire car $\sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} qp^k$
$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} qp^k = \lim_{n\to+\infty} q\frac{1-p^{n+1}}{1-p} = \frac{q}{1-p} = 1$.
L'espérance est donnée par $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)k$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)k = \sum_{k=0}^{n} [\mathbb{P}(X \ge k) - \mathbb{P}(X \ge k+1)]\, k$
$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X \ge k)k - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X \ge k+1)k$
$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X \ge k)k - \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X \ge k)(k-1)$ avec le changement d'inconnue $k \to k-1$
$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \ge k)\,[k - (k-1)] - \mathbb{P}(X \ge n+1)n = (\sum_{k=1}^{n} q^k) - nq^{n+1}$
$= \frac{q(1-q^n)}{1-q} - nq^{n+1} \to_{n\to+\infty} \frac{q}{1-q} = \frac{q}{p}$.

Exo 14 : **a)** Si $X_n = l$ alors X_{n+1} est $l+1$ ou $l-1$ suivant si l'on retire ou ajoute une boule. La probabilité de retirer est $l/6$ du choix de l'une des boules de l'urne.
Donc $\mathbb{P}_{X_n=l}(X_{n+1} = l-1) = \frac{l}{6}$ et $\mathbb{P}_{X_n=l}(X_{n+1} = l+1) = \frac{6-l}{6}$.

b) On a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{6} \mathbb{P}(X_{n+1} = k)k = \sum_{k=0}^{6} \sum_{l=0}^{6} \mathbb{P}(X_n = l)\mathbb{P}_{X_n=l}(X_{n+1} = k)k$ d'après FPT.
$= \sum_{l=0}^{6} \mathbb{P}(X_n = 6) \left(\frac{l}{6}(l-1) + \frac{6-l}{6}(l+1)\right)$ d'après la question a)
$= \sum_{l=0}^{6} \mathbb{P}(X_n = 6)(2l/3 + 1) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$ par thm de transfert.

c) On a $\mathbb{E}(X_0) = 3$ et la relation de récurrence $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$. Le point fixe de la suite arithmético-géométrique est 3. Donc pour tout $n \geq 0, \mathbb{E}(X_n) = 3$.

Exo 15 : **a)** La variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de n expériences et de succès p. Donc $\mathbb{E}(X_n) = np$ et $\mathbb{V}(X_n) = np(1-p)$.

b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}\left(|X_n - np| \geq \alpha\right) \leq \frac{np(1-p)}{\alpha^2}$.
L'évènement $|X_n - np| \geq \alpha$ est le contraire de $\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \frac{\alpha}{n}$.
Posons $\varepsilon = \frac{\alpha}{n}$. On obtient $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
En effet : $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{p+(1-p)}{2} = \frac{1}{2}$ d'après l'inégalité des moyennes. Donc $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

c) On souhaite $\frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq \frac{5}{100}$ et $\varepsilon \leq 10^{-2}$.
Donc on prend $\varepsilon = 10^{-2}$ et $n = \frac{100}{5.4.(10^{-2})^2} = 50000$.

Exo 16 : On appelle A et B les étables. Et on note X le nombre de vaches qui choisissent l'étable A. On recherche la valeur $c \in \mathbb{N}$ tels que $X \leq c$ et $100 - X \leq c$ avec une probabilité supérieur à 95%.

La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathbb{B}(100, 1/2)$ d'espérance $\mathbb{E}(X) = 50$ et de variance $\mathbb{V}(X) = 25$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|X - 50| \geq \varepsilon) \leq \frac{25}{\varepsilon^2}$.

On trouve une erreur de 5% en résolvant $\frac{25}{\epsilon^2} = \frac{5}{100}$ donc $\varepsilon = 10\sqrt{5}$.

Puis $|X - 50| < 10\sqrt{5}$ ssi $X \in]50 - 10\sqrt{5}, 50 + 10\sqrt{5}[\subset [27, 73]$.

Donc il faut construire deux étables de 73 places.