TD 11 : Probabilités

11.1 Espaces probabilisés finis

Exo 1 : **a)** On recherche $c > 0$ tel que $\mathbb{P}_1\{k\} = ck$ est une loi de probabilité sur Ω. Il faut vérifier que la loi est unitaire. Donc $1 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_1\{k\} = \sum_{k=1}^{n} ck = c\frac{n(n+1)}{2}$. Donc $c = \frac{2}{n(n+1)}$ est l'unique solution.

b) De même, on recherche $c > 0$ tel que $\mathbb{P}_3\{k\} = ck^3$ soit unitaire. Donc $1 = \sum_{k=1}^{n} ck^3 = c\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et $c = \frac{4}{n^2(n+1)^2}$ est l'unique solution.

Exo 2 : On a $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ par croissance de la loi.
Donc $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$.
On a $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$.
Donc $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \max(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1, 0)$.

Exo 3 : On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Init. $n = 1$ La formule est $\mathbb{P}(A_1) = (-1)^2\mathbb{P}(A_1)$.
$n = 2$ La formule est $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = (-1)^2\mathbb{P}(A_1) + (-1)^2\mathbb{P}(A_2) + (-1)^3\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.
Hérédite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la formule soit acquise.
On note $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. On a $\mathbb{P}(B \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(B \cap A_{n+1})$.
On a $\mathbb{P}(B) = \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{\operatorname{Card} I+1}\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i)$ par HR.
Puis $\mathbb{P}(B \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k \cap A_{n+1}))$
$= \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{\operatorname{Card} I+1}\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i \cap A_{n+1})$ par HR
$= -\sum_{I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{\operatorname{Card} I+2}\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I\cup\{n+1\}} A_i)$ Ainsi $\mathbb{P}(B)$ permet de sommer sur les parties $J = I$ ne contenant pas $n+1$ et $\mathbb{P}(B \cap A_{n+1})$ permet de sommer sur les parties $J = I \cup \{n+1\}$ contenant $n+1$. On trouve donc toutes les parties $J \subset [\![1, n+1\}$ sauf $\{n+1\}$ qui correspond au terme $\mathbb{P}(A_{n+1})$.

11.2 Modélisation

Exo 4 : On choisit l'univers $\Omega = [\![0, 9]\!]^{10}$ avec les aléas $\omega = (c_1, c_2, ..., c_{10})$ les différents chiffres du numéros.
On a $\mathbb{P}\{06 * * * *\} = \mathbb{P}\{c_1 = 0 \cap c_2 = 6\} = \mathbb{P}\{c_1 = 0\}\mathbb{P}\{c_2 = 6\} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$ par indépendances des chiffres.
On appelle B l'évènement "les chiffres sont distincts. Donc B est l'ensemble des arrangements de 10 chiffres parmi 10 places (le nombre de permutations) $\operatorname{Card} B = 10!$ et $\operatorname{Card}\Omega = 10^{10}$. Donc $\mathbb{P}(B) = \frac{10!}{10^{10}}$.
L'évènement 'contient au moins deux fois' un même chiffre est l'évènement contraire $\bar{B}$ donc $\mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \frac{10!}{10^{10}}$.
On note P l'évènement 'palindrome'.
Alors $P = \{(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_5, c_4, c_3, c_2, c_1)$ pour $0 \leq c_k \leq 9\}$ est déterminé par les 5 premiers chiffres.
Donc $\operatorname{Card} P = 10^5$ puis $\mathbb{P}(P) = 10^{-5}$.

Exo 5 : On note X_1 le nombre de pile obtenue avec les deux premiers lancés. On a $\mathbb{P}(X_1 = 2) = p^2, \mathbb{P}(X_1 = 1) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = (1-p)^2$.
Puis on note X_2 le nombre de nouveau pile obtenu. On a les probabilités conditionnées à la valeur de X_1 :
$\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 0) = 1$ il n'y a pas de lancé
$\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) = p$ et $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 0) = 1 - p$ il y a eu un lancé.
$\mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 2) = p^2, \mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 1) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 0) = (1-p)^2$ il y a eu 2 lancés.

Donc d'après la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(X_2 = l) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}_{X_1=k}(X_2 = l)$.
Donc $\mathbb{P}(X_2 = 2) = p^2p^2 = p^4$, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = 2p(1-p)p + p^2.2p(1-p) = 2p^2(1-p^2)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 0) = (1-p)^2.1 + 2p(1-p).(1-p) + p^2(1-p)^2 = (1-p^2)^2$.
On note alors $S = X_1 + X_2$ le nombre total de piles et $F = (2 - X_1) + (X_1 - X_2) = 2 - X_2$ le nombre de faces.

On résume dans une table le résultat :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(S = k)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)^2$	$(1-p^2)p^2$	$2p^3(1-p)$	p^4
$\mathbb{P}(F = k)$	p^4	$2p^2(1-p^2)$	$(1-p^2)^2$		

Exo 6 : On note M l'évènement 'être malade' et T l'évènement 'avoir un test positif'. On recherche à calculer $\mathbb{P}_T(M)$ et $\mathbb{P}_{\bar{T}}(\bar{M})$.
On note $p = \mathbb{P}(M)$ la proportion de malades dans la population.
On a $\mathbb{P}_T(M) = \mathbb{P}_M(T)\frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T)+\mathbb{P}(\bar{M})\mathbb{P}_{\bar{M}}(T)} = \frac{(99/100)p}{(99/100)p+(1/1000)(1-p)} = \frac{990p}{989p+1}$.
De même $\mathbb{P}_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{\mathbb{P}_{\bar{M}}\mathbb{P}(\bar{T})}{\mathbb{P}_{\bar{M}}\mathbb{P}(\bar{T})+\mathbb{P}_M\mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{999/1000(1-p)}{999/1000(1-p)+1/100p} = \frac{999(1-p)}{989(1-p)+10}$.
Pour $p = 1/100$ (taux d'incidence 1000 pour 100000) on trouve 90% et 99%.
Pour $p = 1/500$ (taux d'incidence 200 pour 100000) on trouve 66% et 99.9%.
Pour $p = 1/1000$ (taux d'incidence 100 pour 100000) on trouve 50% et 99.99%.

Exo 7 : On note AA_k, AB_k et BB_k l'évènement être du génotype AA, AB ou BB à la génération k.
Notons $x, 2y$ et z la probabilité d'être de type AA, AB et BB à la 1ère génération. On a $x + 2y + z = 1$.
On a $\mathbb{P}(AA_2) = \mathbb{P}(AA_1)^2 + \mathbb{P}(AA_1)\frac{1}{2}\mathbb{P}(AB_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(AB_1)\mathbb{P}(AA_1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(AB_1)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$.
Puis $\mathbb{P}(BB)_2 = (z+y)^2$ par symétrie du problème.
Et $\mathbb{P}(AB_2) = 1-(x+y)^2-(z+y)^2 = (x+2y+z)^2-(x+y)^2-(z+y)^2 = 2y^2+2xy+2zy+2xz = 2y(y+x+z) + 2xz = 2y(1-y) + 2xz$.
Ainsi $(x, 2y, z) \mapsto ((x+y)^2, 2[y(1-y) + xz], (x+z)^2)$.
On note $X = (x+y)^2, Y = y(1-y) + xz$ et $Z = (x+z)^2$.
A la 3ème génération, on trouve $\mathbb{P}(AA_3) = (X+Y)^2 = ((x+y)^2 + y(1-y) + xz)^2$
$= (x^2 + 2xy + y^2 + y - y^2 + xz)^2 = (x(x+2y+z) + y)^2 = (x+y)^2 = X$.
De même, on trouve $\mathbb{P}(BB_3) = (z+y)^2 = Z$.
Donc $\mathbb{P}(AB_3) = 1 - \mathbb{P}(AA_3) - \mathbb{P}(BB_3) = 1 - X - Z = 2Y$.
Donc la suite stationne à partir du rang 2 en $(X, 2Y, Z)$.

11.3 Conditionnement

Exo 8 : On note $\Omega = \mathcal{P}_n([\![1, m+n]\!])$ l'univers où $\omega = \{p_1, ..., p_n\}$ sont les rangs des boules rouges dans l'ordre du tirages.
On note A_{2k} l'évènement k boules rouges et k boules noires après $2k$ tirages pour la première fois.
Donc un tirage dans A_{2k} est de la forme RR(...)NN ou NN(...)RR avec (...) étant autant de rouges que de noires.
Donc $\text{Card}\,(A_{2k}) = 2\text{Card}\,\mathcal{P}_{k-2}([\![3, 2k-2]\!])\text{Card}\,\mathcal{P}_{n-k}([\![2k+1, m+n]\!]) = 2\binom{2k-4}{k-2}\binom{m+n-2k}{n-k}$.
Puis l'évènement recherché est $A = \cup_{k=1}^{min(n,m)} A_{2k}$.
Donc on trouve $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{min(n,m)} \mathbb{P}(A_{2k}) = \frac{2}{4} + \sum_{k=2}^{min(n,m)} \frac{2(2k-4)!(m+n-2k)!}{(k-2)!^2(n-k)!(m-k)!}\frac{n!m!}{(n+m)!}$

Exo 9 : On note A_k l'évènement "choisir le lot k" et D_1 (resp. D_2) le premier (resp. le second) article est défectueux. On recherche $\mathbb{P}_{D_1}(D_2)$.

Or A_1, A_2 et A_3 est un système complet d'évènements incompatibles. Donc on peut appliquer la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}_{D_1}(D_2) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{D_1\cap A_k}(D_2) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3}\frac{n_k-1}{n_k+m_k-1}$.

Exo 10 : On note $D : \Omega \to [\![1,6]\!]$ la valeur du dé. On a $\mathbb{P}(D=k) = \frac{1}{6}$.
On note A l'évènement 'au moins un pile'. Donc $\bar{A}$ est l'évènement faire toujours face.
On utilise la formule des probabilités totales sur le système $\{D=k\}_{1\leq k\leq 6}$.
Donc $\mathbb{P}(\bar{A}) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(D=k)\mathbb{P}_{D=k}(\bar{A}) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^k$
$= \frac{1}{6}\frac{2}{3}\frac{1-(2/3)^6}{1-(2/3)} = \frac{1-(2/3)^6}{3}$.

Exo 11 : On peut calculer les probabilités de B_1, N_2 et $B_1\cap N_2$ sachant U :
On a $\mathbb{P}_U(B_1) = 9/10$, $\mathbb{P}_U(N_2) = 1/10$ et $\mathbb{P}_U(B_1\cap N_2) = 9/100$ car il y remise.
De même $\mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1) = 3/10$, $\mathbb{P}_{\bar{U}}(N_2) = 7/10$ et $\mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1\cap N_2) = 21/100$.
D'après la formule des probabilités totales, on en déduit :
$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}_U(B_1) + \mathbb{P}(\bar{U})\mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1) = \frac{1}{6}\frac{9}{10} + \frac{5}{6}\frac{3}{10} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.
$\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}_U(N_2) + \mathbb{P}(\bar{U})\mathbb{P}_{\bar{U}}(N_2) = \frac{1}{6}\frac{1}{10} + \frac{5}{6}\frac{7}{10} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$.
$\mathbb{P}(B_1\cap N_2) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}_U(B_1\cap N_2) + \mathbb{P}(\bar{U})\mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1\cap N_2) = \frac{1}{6}\frac{9}{100} + \frac{5}{6}\frac{21}{100} = \frac{114}{600} = \frac{19}{100}$.

Donc les évènements ne sont pas indépendants car $\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(N_2) = \frac{6}{25} = \frac{24}{100} > \frac{19}{100} = \mathbb{P}(B_1\cap N_2)$.
D'après la formule de Bayes, on a $\mathbb{P}_{B_1\cap N_2}(U) = \mathbb{P}_U(B_1\cap N_2)\frac{\mathbb{P}(U)}{\mathbb{P}(B_1\cap N_2)} = \frac{21}{100}\frac{1}{6}\frac{100}{19} = \frac{7}{38} < \frac{1}{2}$.
Donc il est plus probable d'avoir fait le tirage dans V.

Exo 12 : **a)** On choisit les k boules à placer dans l'urne 1 : C_m^k possibilités.
On choisit un remplissage des $n-1$ urnes restantes avec les $m-k$ boules $[\![2,n]\!]^{m-k}$ avec $(n-1)^{m-k}$ possibilités.
Donc $p_{m,n} = \frac{\binom{m}{k}(n-1)^{m-k}}{n^m}$.

b) On a $p_{m_i,i} = \frac{m_i(m_i-1)\dots(m_i-k+1)}{k!}\frac{(i-1)^{m_i-k}}{i^{m_i}} \sim_{i\to+\infty} \frac{m_i^k}{k!}\frac{1}{i^k}\left(1-\frac{1}{i}\right)^{m_i-k}$.
Or $\frac{m_i^k}{i^k} \to \lambda^k$.
Et $\left(1-\frac{1}{i}\right)^{m_i-k} = \exp\left((m_i-k)\ln(1-1/i)\right) =_{i\to+\infty} \exp\left((m_i-k)(-1/i+o(1/i))\right) \to_{+\infty} \exp(-\lambda)$.
Donc $p_{m_i,i} \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

c) Chacune des urnes contient donc 0 ou 1 boule.
On choisit les m urnes qui contiennent chacune des boules ordonnées : il y a A_n^m possibilités.
Donc $q_{m,n} = \frac{A_n^m}{n^m}$.
Puis $q_{m,i} = \frac{i(i-1)\dots(i-m+1)}{i^m} \sim_{i\to+\infty} \frac{i^m}{i^m} = 1$ car m est fixé.

d) On a $\ln q_{m_i,i} = \ln\left(\frac{i(i-1)\dots(i-m_i+1)}{i^{m_i}}\right) = \sum_{k=0}^{m_i-1}\ln(i-k)-\ln(i) = \sum_{k=0}^{m_i-1}\ln\left(1-\frac{k}{i}\right)$
$\sim_{i\to+\infty} \sum_{k=0}^{m_i-1} -\frac{k}{i} = -\frac{(m_i-1)m_i}{2i} \sim -\frac{(\lambda\sqrt{i})^2}{2i} \to -\lambda^2/2$.
Donc $q_{m_i,i} \to \exp(-\lambda^2/2)$.

e) Dans notre modèle les jours sont les urnes et les anniversaires des élèves les boules.
On a $n = 365$ (très grand) et on recherche le plus petit m tels que $q_{m,n} \leq (1/2)$. Pour $1/2 = e^{-\lambda^2/2}$ on trouve $\lambda = \sqrt{2\ln 2}$. Puis $m = \sqrt{n}\lambda \approx 23$. Il faut au moins 23 élèves.

f) Si on fixe la date a posteriori alors le modèle est $p_{m,n}$ avec $k = 1$.
Donc $1/2 = \lambda e^{-\lambda}$ on trouve $\lambda \approx 0.6929$ Puis $m = n\lambda \approx 253$. Il faut au moins 254 élèves.