TD 11 : Probabilités

11.1 Espaces probabilisés finis

Exercice 1 ($\star$) Soient n un entier et $\Omega = [\![1, n]\!]$.

a) Définir une probabilité $\mathbb{P}_1$ sur Ω tel que $\mathbb{P}_1(\{k\})$ soit proportionnel à k.

b) Définir une probabilité $\mathbb{P}_3$ sur Ω tel que $\mathbb{P}_3(\{k\})$ soit proportionnel à k^3.

Exercice 2 ($\star$) Soit A, B deux évènements d'un espace probabilisé. Montrer que :

$$\max\big(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1\big) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\big(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\big).$$

Exercice 3 ($\star\star$) Soit $A_1, ..., A_n$ n évènements d'un espace probabilisé. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{\operatorname{Card} I + 1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

11.2 Modélisation

Exercice 4 ($\star$) On compose au hasard un numéro de téléphone de dix chiffres. Calculer les probabilités des événéments suivants :

a) $A =$ "le numéro commence par 06"

b) $B =$ "tous les chiffres soient distincts"

c) $C =$ "le numéro contient deux fois un même chiffre"

d) $D =$ "le numéro est un palindrome".

Exercice 5 ($\star$) On lance deux fois un pièce truquée avec une probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir pile. Puis on lance à nouveau la pièce du nombre de pile obtenue aux deux premiers lancés. Calculer les probabilités d'obtenir k fois pile pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$, d'obtenir k fois face pour $k = 0, 1, 2$.

Exercice 6 ($\star$) Dans une population un test de dépistage d'une maladie est mis au point. Parmi les malades 99% des individus sont positifs au test et parmi les non-malades 0.1% sont aussi positifs (faussement) au test. Déterminer la précision du test en calculant la probabilité d'être malade lorsque le test s'avère positif et la probabilité d'être non-malade lorsque le test est négatif.

Exercice 7 ($\star\star$) Chez un organismes diploïdes les caractères héréditaires sont portés par des paire de gènes, un gène pouvant prendre deux formes (ou allèles), notés A et B. Chaque parent transmet à un descendant commun un de ses deux gènes, de façon équiprobable, l'un indépendamment de l'autre. Les génotypes possibles sont AA, AB, BB. Partons d'une génération chez laquelle les génotypes AA, AB et BB sont réparties aléatoirement.

Montrer qu'à partir de la deuxième génération les probabilités de ces génotypes sont constantes.

11.3 Conditionnement

Exercice 8 ($\star$) Un sac contient n boules rouges et m boules noires. On retire, au hasard, les $m+n$ boules les unes après les autres. Quelle est la probabilité de l'évènement E : "à un moment donné il y a eu autant de boules rouges que de boules noires hors du sac" ?

Exercice 9 ($\star$) On considère trois lots d'articles de même type, le premier compte n_1 articles défectueux et m_1 bons articles ; le deuxième, n_2 articles défectueux et m_2 bons articles et le troisième, n_3 articles défectueux et m_3 bons articles. On choisit au hasard l'un des lots pour en tirer au hasard deux articles, le premier est défectueux. Quelle est la probabilité que le second article soit défectueux lui aussi ?

Exercice 10 ($\star$) On lance un dé à 6 faces. Si le dé amène le numéro k, on lance k fois une pièce de monnaie avec une probabilité $1/3$ de faire pile. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile ?

Exercice 11 ($\star$) On lance un dé équilibré, puis on effectue deux tirages d'une boule avec remise :
- Dans l'urne U contenant 9 boules blanches et 1 noires, si le dé fait l'as.
- Dans l'urne V contenant 3 boules blanches et 7 noires, sinon.
On note les évènements : U 'on tire dans l'urne U', B_i la i-ème est blanche et N_i la i-eme est noire.
Les évènements B_1 et N_2 sont-ils indépendants ?
On obtient une boule blanche puis une noire. De quelle urne est-il plus probable qu'on ait joué ?

Exercice 12 ($\star\star$) On se donne n urnes dans lesquelles on dispose au hasard m boules.
On modélise le problème en prenant pour univers $\Omega = [\![1, n]\!]^m$ muni de la probabilité uniforme.

a) Soit $k \in [\![1, m]\!]$. Quel est la probabilité $p_{m,n}$ de l'événement "la première urne contienne k boules" ?

b) Soit $\lambda > 0$ et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\geq 0}$ telle que $m_i \sim_{i\to+\infty} i\lambda$. Montrer que $p_{m_i,i}$ tend vers $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, lorsque i tend vers $+\infty$.

c) Déterminer la probabilité $q_{m,n}$ de l'événement "Chaque urne contient au plus une boule". Montrer que $q_{m,i}$ tend vers 1 lorsque i tend vers $+\infty$.

d) Soit $\lambda > 0$ et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\geq 0}$ telle que $m_i \sim_{i\to+\infty} \sqrt{i}\lambda$.
Montrer que $q_{m_i,i}$ tend vers $e^{-\lambda^2/2}$ lorsque i tend vers $+\infty$.

e) Etant donnée une classe d'élèves nés tous une même année non bisextile, déterminer l'effectif minimum de la classe pour que la probabilité que deux élèves soient nés le même jour soit supérieure à $1/2$.

f) Etant donné un élève de la classe, quel est l'effectif minimum de la classe pour que la probabilité qu'un autre élèves soit né le même jour soit supérieure à $1/2$.