TD 10 : Dénombrement

10.1 Dénombrement théorique

Exercice 1 ($\star$) Soit n un entier. Calculer $Card\{(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = x + 2y\}$.
Exercice 2 ($\star\star$) Soit E un ensemble fini de cardinal n.

a) Calculer le nombre de surjection de E dans $\{1, 2\}$.
b) Calculer le nombre de surjection de E dans $\{1, 2, 3\}$.
c) Calculer le nombre de surjection de E dans E.
d) Calculer le nombre d'application non surjective de E dans E.

Exercice 3 ($\star\star$) Soit E l'ensemble des entiers écrit en base 10 avec exactement les six nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Par exemple : $123456, 214356 \in E$.

a) Calculer le cardinal de E.
b) On peut classer par ordre croissant ces entiers. Quel est le rang de 362145 ?
c) Quel est le 500-ième nombre de E ?
d) Calculer la valeur de la somme : $\sum_{x \in E} x$.

Exercice 4 ($\star$) Etablir les formules suivantes, pour deux entiers $n \geq p \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Ecrire la seconde formule pour $p = 0, 1, 2, 3$ et retrouver la valeur des sommes :

$$\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 5 ($\star\star$) (Formule de Vandermonde) On note $E = A \cup B$ une partition de E avec $CardA = n$ et $CardB = m$.

a) Montrer que $\phi : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(E), (X, Y) \mapsto X \cup Y$ est une bijection dont on précisera la réciproque.
b) On fixe $k \in \mathbb{N}$. En déduire que $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

Exercice 6 ($\star$) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de partitions d'un ensemble de np éléments en n parties de cardinal p.
Combien y a-t-il de choix de trinômes de colles possibles dans une classe de 45 élèves ?

10.2 Application aux probabilités

Exercice 7 ($\star\star$) On considère un jeu de 32 cartes à jouer. Et on regarde les mains de 5 cartes possibles. Calculer le nombre puis la probabilité des mains suivantes :

a) un full : c'est à dire une paire et un brelan.
b) un carré : c'est à dire 4 cartes identiques.
c) un brelan : c'est à dire 3 cartes identiques (et ni un carré ni un full).
d) deux paires et pas de meilleur combinaison.
e) une paire : c'est à dire 2 cartes identiques et pas de meilleur combinaison.

Exercice 8 ($\star$) Un lot de n balles sont rangées au hasard dans n boites, chacune pouvant contenir toutes les balles. Quelle est la probabilité qu'une boite reste vide ?
Exercice 9 ($\star$) Huit personnes garent leurs huit voitures dans un parking de 12 places alignées. Quelle est la probabilité que les quatre places restantes soient adjacentes ?
Exercice 10 ($\star$) Une boite contient 90 bonnes vis et 10 vis défectueuses. On en prend 10 au hasard. Quelle est la probabilité de n'avoir pris aucune vis défectueuse ?
Exercice 11 ($\star$) Dix paires de chaussures sont dans une boite, quatre chaussures sont prises au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir une paire parmi les quatre ?
Exercice 12 ($\star$) Cinq dés équilibrés à 6 faces sont lancés. Quelle est la probabilité qu'au moins trois d'entre eux montrent la même face ?