Calculer les bornes supérieures et inférieurs, si elles existent, de

$$A = \left\{ \frac{3p}{2pq+5} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

non vide : La partie A est non vide car $\frac{3}{7} \in A$ avec $p = q = 1$.

majorée : On a $\frac{3p}{2pq+5} \leq \frac{3p}{2p+5} = \frac{3}{2} - \frac{15/2}{2p+5} < \frac{3}{2}$. Donc $M = \frac{3}{2}$ est un majorant.

majorant approché : De plus $a_n = \frac{3n}{2n+5} \to \frac{3}{2}$ et $a_n \in A$ avec $p = n$ et $q = 1$.

Donc, par caractérisation séquentielle, $\boxed{\sup A = \frac{3}{2}}$.

minorée : On a $\frac{3p}{2pq+5} \geq \frac{3}{2q+5} > 0$. Donc $m = 0$ est un minorant.

minorant approché : On a $a_n = \frac{3}{2n+5} \to 0$ et $a_n \in A$ avec $p = 1$ et $q = n$.

Donc, par caractérisation séquentielle, $\boxed{\inf A = 0}$.

Etudier les suites définies par $\begin{cases} u_{n+1} & = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = 2u_n + 3v_n + 1 \\ u_0 & = v_0 = 0 \end{cases}$ à l'aide de $w_n = u_n + v_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = (2u_n + v_n) + (2u_n + 3v_n + 1) = 4(u_n + v_n) + 1 = 4w_n + 1$.
Donc (w_n) est une suite arithmético-géométrique de raison 4.
Son point fixe vérifie $l = 4l + 1$ ssi $l = -1/3$.

Donc $w_n = 4^n(w_0 - l) + l = \boxed{\frac{1}{3}4^n - \frac{1}{3}}$.

On pose également $a_n = 2u_n - v_n$. On a $a_{n+1} = 2u_n - v_n - 1 = a_n - 1$ est une suite arithmétique de raison -1. Donc $a_n = -n = -n$.

On en déduit $u_n = \frac{1}{3}(w_n + a_n) = \boxed{\frac{1}{9}4^n - \frac{1}{9} - \frac{n}{3}}$

et $v_n = \frac{1}{3}(2w_n - a_n) = \boxed{\frac{2}{9}4^n - \frac{2}{9} + \frac{n}{3}}$.

Ainsi $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{9}4^n \to +\infty$ et $v_n \sim_{+\infty} \frac{2}{9}4^n \to +\infty$.

On considère les suites définies par $u_0 = 1, v_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
Montrer que le suites sont adjacentes. Préciser leur limite.

Différence des deux suites : On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{3}$ est géometrique de raison $\frac{1}{3}$.
Donc $v_n - u_n = \frac{(v_0 - u_0)}{3^n} = \frac{1}{3^n} \to 0$.

(u_n) **croissante :** On a $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$.

(v_n) **décroissante :** On a $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{3} = -\frac{1}{3^{n+1}} < 0$.

Donc les suites sont adjacentes et elles tendent vers une même limite $l \in [1, 2]$.

Calcul de la limite : On peut remarquer que $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$. Donc la suite est constante égale à $u_0 + v_0 = 3$. Ainsi en passant à la limite on trouve $2l = 3$ puis $\boxed{l = \frac{3}{2}}$.

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{-1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

On introduit $f(x) = \frac{x^2+1}{2}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Point fixe : On a $f(l)=l$ ssi $l^2+1=2l$ ssi $l^2-2l+1=(l-1)^2=0$ ssi $l=1$.

Intervalle stable : On a $u_1=f(u_0)=\frac{3}{8}\in[0,1[$.
Puis $f([0,1[)=[f(0),f(1)[\subset[0,1[$ car f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Donc pour tout $n\geq 1, u_n\in[0,1[$.

Monotonie : On sait que f est croissante sur $[0,1[$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone.
Puis $u_2=f(u_1)=\frac{73}{128}>\frac{48}{128}=\frac{3}{8}=u_1>u_0$.
Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

Conclusion : D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{u_n\to 1}$ l'unique point fixe.

On considère $f:x\mapsto E(x)+(x-E(x))^2$ avec $E(x)=\lfloor x\rfloor$.
Etudier la continuité puis la dérivabilité de f.

Régularité globale : La fonction E est C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Par opération, on obtient que f est également C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Continuité locale : Soit $n\in\mathbb{Z}$. On a $f(n)=n$.
Puis $f(x)=n+(x-n)^2\to_{x\to n^+} n+(n-n)^2=n$ au voisinage à droite.
Et $f(x)=(n-1)+(x-(n-1))^2\to_{x\to n^+}(n-1)+(n-(n-1))^2=n$ au voisinage à gauche.
Donc f est continue en n.

Dérivabilité locale : Soit $n\in\mathbb{Z}$.
Pour $x\in]n,n+1[$, on a $\frac{f(x)-f(n)}{x-n}=\frac{n+(x-n)^2-n}{x-n}=x+n\to_{x\to n}2n$.
Pour $x\in]n-1,n[$, on a $\frac{f(x)-f(n)}{x-n}=\frac{n-1+(x-n+1)^2-n}{x-n}$
$=\frac{-1+(x-n)^2+2(x-n)+1}{x-n}=x+n+2\to_{x\to n}2n+2$.
Donc f est dérivable à droite et à gauche en n avec $f'(n^+)=2n\neq 2n+2=f'(n^-)$.
Ainsi f n'est pas dérivable en n.

Déterminer les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $|f(x)-f(y)|=|x-y|$.

On note $A=f(0)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}, |f(x)-A|=|x|$. Donc $f(x)=s(x)x+A$ avec $s(x)\in\{-1,1\}$.

Pour $x\neq y$, on obtient $|s(x)x-s(y)y|=|x-y|$ donc en élevant au carré : $x^2-2s(x)s(y)xy+y^2=x^2-2xy+y^2$. Ainsi $s(x)s(y)xy=xy$ i.e. $xy=0$ ou $s(x)s(y)=1$.

Dans le premier cas, on calcul simplement le signe de zéro $s(0)$ qui peut être arbitraire. Dans le second cas, on obtient pour tout x,y non nuls, $s(x)=s(y)$ i.e. s est constante.

Ainsi il y a deux types de solutions $\boxed{f(x)=x+A}$ pour $A\in\mathbb{R}$ lorsque $s=1$ ou $\boxed{f(x)=-x+A}$ pour $A\in\mathbb{R}$ lorsque $s=-1$.

Ce sont les fonctions affines de pente 1 ou -1.

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue et strictement décroissante.
Montrer que pour tout $n\geq 1$, il existe un unique x_n tel que $f(x_n)=x_n^n$.
Etudier la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

Soit $n\geq 1$. Notons $g_n(x)=f(x)-x^n$. On sait que g_n est strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus $g_n(0)=f(0)\geq 0$ et $g_n(1)=f(1)-1\leq 1-1=0$ car $0\leq f(x)\leq 1$ pour tout $x\in[0,1]$. Ainsi g_n réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[f(1)-1,f(0)]$ qui contient 0. Donc il existe un unique $x_n\in[0,1]$ tel que $g_n(x_n)=0\Leftrightarrow f(x_n)=x_n^n$.

On a $g_{n+1}(x_n)=f(x_n)-x_n^{n+1}=x_n^n-x_n^{n+1}=x_n^n(1-x_n)\geq 0$. Or $g_{n+1}(x_{n+1})=0$ par définition. Donc $g_{n+1}(x_n)\geq g_{n+1}(x_{n+1})$ avec g_{n+1} décroissante. Donc $x_n\leq x_{n+1}$. Ainsi la suite

$(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 1. Donc $x_{\to} l \in [x_1, 1]$ d'après le théorème de la limite monotone.

Si $f(l) > 0$ alors $x_n = \sqrt[n]{f(x_n)} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(f(x_n))\right) \to \exp(0) = 1 = l$. Si $f(l) = 0$ alors $0 \leq f(1) \leq f(l) = 0$ par décroissante. Puis $f(l) = f(1)$ donc $l = 1$ par stricte monotonie. Dans tous les cas $\boxed{x_n \to 1}$.

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ tel que $f(0) = f'(0) = f(a) = 0$.
Montrer qu'il existe une tangente en $c > 0$ à la courbe de f qui passe par l'origine.

L'équation de la tangente en un point c recherché est $y = f(c) + f'(c)(x - c)$. Si cette tangente passe par l'origine $(x, y) = (0, 0)$ alors $0 = f(c) - f'(c)c$.

Posons $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$, on sait que g est de classe C^1 sur $]0, a]$ et se prolonge en 0 car $g(x) = \tau_0(f)(x) \to f'(0)$.

Donc g est continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a[$. De plus $g(0) = f'(0) = 0$ et $g(a) = \frac{f(a)-f(0)}{a} = 0$. Ainsi d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, a[$ tel que $g'(c) = 0$.

Par calcul, $g'(x) = \frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}$ donc $g'(c) = \frac{f(c)-cf'(c)}{c^2} = 0$ i.e. $0 = f(c) - f'(c)c$ qui est bien la condition recherchée.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)$ pour $x > 0$.

On peut utiliser la convexité de $f : t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$ entre 1 et x avec un facteur $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ainsi $f\left(\frac{1+x}{2}\right) \leq \frac{f(1)+f(x)}{2}$ s'écrit $\frac{(1+x)^n}{2^n} \leq \frac{1^n+x^n}{2}$.

Puis en multipliant par $2^n > 0$, on obtient $\boxed{(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)}$.

Soit f convexe sur $[a, b]$ tel que $f(a) < 0 < f(b)$.
Montrer qu'il existe un unique c tel que $f(c) = 0$.

Existence : On sait que f est convexe donc en particulier f est continue sur $[a, b]$.
On a $f(a) < 0 < f(b)$ donc d'après le TVI, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Unicité : On suppose par l'absurde que $f(c_1) = f(c_2) = 0$ avec $a < c_1 < c_2 < b$.
On a $\tau_{c_1}(f)(a) < \tau_{c_1}(f)(c_2) = 0$ d'après l'inégalité des trois pentes.
Or $\tau_{c_1}(f)(a) = \frac{f(c_1)-f(a)}{c_1-a} = \frac{-f(a)}{c_1-a} > 0$ car $f(a) < 0$.
Ce qui est absurde. Donc c est unique.