Méthode de diagonalisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Résoudre le système linéaire $AX = X$ en les variables x, y et z.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de λ le rang de $A - \lambda I_3$.
   (c) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système $AX = \lambda X$ admet-il des solutions non nulles ?
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Montrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on déterminera.
   (c) En déduire que A est une matrice inversible et calculer A^{-1}.
   (d) Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1. (a) Le système linéaire $AX = X$ est le système homogène $(A - I)X = 0$:
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'ensemble solution est donc $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Si $\lambda = 1$ la question précédente montre que le rang vaut 2.
   On peut calculer le rang par équivalence sur les lignes et les colonnes :
   $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 1-\lambda & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$ par $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$.
   Pour $\lambda \neq 1$ faire la dilatation $C_1 < -C_1/(1-\lambda)$
   $\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ par $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.
   Le rang de cette matrice est donc 3 sauf $\lambda \in \{2, -1\}$ il vaut alors 2.
   (c) D'après le théorème du rang un système homogène a des solutions non nulles dès que son rang est différent de 3 car dans ce cas il y a au moins un paramètre. Donc pour $\lambda \in \{1, 2, -1\}$ le système $(A - \lambda I)X = 0$ a des solutions non nulles.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Par la méthode du pivot on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Par le calcul, on trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (c) La matrice diagonale D est inversible car sa diagonale est non nulle.
   Donc $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) On trouve par récurrence $D^n = P^{-1}A^nP$ et par calcul $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.
   On en déduit $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & -2+2^{n+1} & 2-2^{n+1} \\ 2^n-(-1)^n & 2^n & -2^n+(-1)^n \\ -1+2^{n+1}-(-1)^n & -2+2^{n+1} & 2-2^{n+1}+(-1)^n \end{pmatrix}$.