Nombre de diviseurs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ décomposé en produit de facteurs premiers $n = \prod_{p \text{ premier}} p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_p \in \mathbb{N}$ qui stationne en 0.

1. Montrer que pour p premier et $k \in \mathbb{N}$. On a l'équivalence : $p^k | n$ ssi $k \in [\![0, \alpha_p]\!]$.
2. En déduire que le nombre de diviseurs positifs de n est $\prod_{p \text{ premier}} (\alpha_p + 1)$.
3. Déterminer le plus petit entier naturel qui admet exactement 15 diviseurs positifs.

1. $(\Rightarrow)$ On suppose $p^k | n = p^{\alpha_p} d$ avec d premier avec p.
   Donc d'après le théorème de Gauss. $p^k | p^{\alpha_p}$ puis $p^k \leq p^{\alpha_p}$ donc $k \leq \alpha_p$.
   $(\Leftarrow)$ On suppose $k \leq \alpha_p$ donc $p^k | p^{\alpha_p} | n$ par transitivité.
2. On écrit $d = \prod_{p \text{ premier}} p^{k_p}$ un diviseur de n. On a $p^{k_p} | d | n$ donc $k_p \in [\![0, \alpha_p]\!]$.
   Donc $Div(n) = \{ \prod_{p \text{ premier}} p^{k_p}$ pour $k_p \in [\![0, \alpha_p]\!]\}$. Donc le nombre de diviseur est le nombre d'indices $(k_p)_{p \text{ premier}}$ tel que $0 \leq k_p \leq \alpha_p$. On a $\text{Card}([\![0, \alpha_p]\!]) = \alpha_p + 1$. Donc il y a $\prod_{p \text{ premier}} (\alpha_p + 1)$ diviseurs de n.
3. On suppose que $\prod_{p \text{ premier}} (\alpha_p + 1) = 15 = 5 \times 3$. Donc $n = p^{14}$ ou $n = p^4 q^2$ avec p, q des nombres premiers distincts. Pour être minimal, il faut $p = 2$ et $q = 3$.
   Donc $n = 2^{14} = 16384$ ou $n = 2^4.3^2 = 144$. Ainsi $n = 144$ est le plus petit.