Semaine 15 - Du 19 au 23 Janvier 2026

Calcul matriciel et Système linéaire

Révision de la semaine 14

Matrices élémentaires et réduction

Matrice de transvections, de permutation (transposition) et de dilatation.
Ecriture matricielle de l'algorithme du pivot de Gauss. Réduction de la forme $A = ER$.
Calcul des inverses des matrices élémentaires.
L'équivalence de matrices par lignes est une relation d'équivalence.

Opérations élémentaires sur les colonnes

Les opérations sur les colonnes de A sont celles sur les lignes de A^T.
Méthode du pivot de Gauss sur les colonnes matricielle et réduction $A = R^T F$.

Matrice carrées inversibles

Caractérisation des matrices triangulaires inversibles.
Condition nécessaire et suffisante pour A inversible : $A \sim_L I_n$; $A \sim_C I_n$;
$AX = 0$ a au plus une solution ; $\forall \mathbf{b}, AX = \mathbf{b}$ a au moins une solution ; $rg(A) = n$.
Méthode d'inversion d'une matrice par matrice augmentée de l'identité.

Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

Généralités

Multiples et diviseurs. Division euclidienne.
La division est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
La congruence est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
Propriétés sur les sommes, produits et puissances modulo b.
Utilisation des congruences pour obtenir une divisibilité : $b|a \Leftrightarrow a = 0[b]$.

PGCD et PPCM

Définition de $pgcd(a, b)$ comme le maximum pour la relation $\leq$.
Algorithme d'Euclide. Nombres premiers entre eux, théorème de Bézout et théorème de Gauss.
Résolution des équations diophantiennes linéaires.

Liste de Questions de cours :

a) Démontrer la stabilité des matrices triangulaires par les opérations.
b) Calculer les puissances de $A = 2I_n + B$ avec $B^2 = I_n$.
c) Montrer que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et que $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
d) Montrer que l'équivalence par lignes est une relation d'équivalence.
e) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $X \neq 0$ vérifiant $AX = \lambda X$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
f) Programmer en Python l'algorithme d'Euclide et démontrer sa terminaison et sa validité.

Exercices d'Application du Cours

1. Inverser les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre l'équation diophantienne $21x + 16y = 1$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 14|(3^{4n+2} + 5^{2n+1})$.

Devoir libre

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ décomposé en produit de facteurs premiers $n = \prod_{p \text{ premier}} p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_p \in \mathbb{N}$ qui stationne en 0.
   (a) Montrer que pour p premier et $k \in \mathbb{N}$. On a l'équivalence : $p^k | n$ ssi $k \in [\![0, \alpha_p]\!]$.
   (b) En déduire que le nombre de diviseurs positifs de n est $\prod_{p \text{ premier}} (\alpha_p + 1)$.
   (c) Déterminer le plus petit entier naturel qui admet exactement 15 diviseurs positifs.