Devoir Surveillé de Mathématiques n^{o} 5
le samedi 17 Janvier 2026 - durée 4h

Problème I : Calculons les puissances de $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par quatre méthodes **indépendantes** .

Méthode 1 : Forme de la matrice

1. Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ des coefficients $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 2^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$. Etablir une relation de récurrence entre ses suites.
2. Déterminer une expression explicite de a_n et c_n en fonction de n.
3. Montrer que $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} - b_k$ et en déduire une expression explicite de b_n.
4. En déduire la valeur de T^n pour $n \geq 0$.

Méthode 2 : Formule du binôme

5. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $T = I_3 + A$.
6. Déterminer les puissances de A.
7. En déduire la valeur de T^n pour $n \geq 0$.

Méthode 3 : Polynôme annulateur

8. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $T^2 = aT + bI_3$.
9. En déduire qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $T^n = a_nT + b_nI_3$.
10. Déterminer les valeurs de a_n et b_n.
11. En déduire la valeur de T^n pour $n \geq 0$.

Méthode 4 : Diagonalisation

12. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
13. Calculer $D = P^{-1}TP$.
14. Montrer par récurrence que $T^n = PD^nP^{-1}$
15. En déduire la valeur de T^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Problème II : Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sont $|a|$-lipschitzienne.
2. Démontrer le résultat de Cours : "f lipschitzienne $\Rightarrow$ f continue".
3. Montrer que $x \mapsto \text{Arctan}\,(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 1-lipschitzienne.
4. Montrer que si pour f est $(1/n)$-lipschitzienne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors f est constante.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.
On suppose f est M_f-lipschitzienne et que g est M_g-lipschitzienne.

5. Montrer que $g \circ f$ est (M_gM_f)-lipschitzienne.
6. En déduire que $x \mapsto \text{Arctan}\,(ax + b)$ et $x \mapsto a\sin(x) + b$ sont $|a|$-lipschitzienne.
7. On suppose, désormais, que $f(I) \subset I$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f \circ f ... \circ f$ est M_f^n-lipschitzienne.
8. On suppose que $f \circ f = f$ et que f est $(1/2)$-contractante. Déterminer f.

Problème III : Soit $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **Les parties 1., 2. et 3. sont indépendantes.**

1. On pose $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.
   (a) Calculer A puis A^2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, M^n = I_3 + \alpha_n A$.
   (c) Exprimer α_n en fonction de n et en déduire M^n.
2. (a) Montrer qu'il existe une matrice B telle que $M = 4B - 3I_3$.
   (b) Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Donner une expression de M^n en fonction de n, I_3 et B.
3. On note $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ avec x, y et z des réels.
   (a) Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels le système $MX = \lambda X$ admet une solution non nulle.
   (b) Déterminer des réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $M \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -3 \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
   (c) Déterminer des réels $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $M \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{smallmatrix}\right)$ et $M \left(\begin{smallmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
   (d) On pose $P = \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ b & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (e) Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.
   (f) En déduire l'écriture matricielle de M^n.
4. Une application : **On peut ici utiliser les parties précédents.**
   On considère les suites réelles définies par $\begin{cases} u_{n+1} & = -7u_n - 8w_n \\ v_{n+1} & = 4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} & = 4u_n + 5w_n \end{cases}$.
   (a) Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les premiers termes pour que ces trois suites admettent des limites finies.

Problème IV : On veut étudier la fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

A. Propriété de continuité de f

1. Montrer que pour $x > 0$, on a l'inégalité $1 \leq f(x) \leq e^x$.
2. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.

B. Convexité de f

5. Montrer que, pour $x \neq 0, f''(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ avec une fonction g à préciser.
6. Montrer que $g'(x) = x^2 e^x$ et en déduire le signe de g.
7. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
8. En déduire que f est dérivable à droite et à gauche en 0.

C. Prolongement de la dérivabilité de f

9. Montrer que, pour $x \neq 0, xf'(x) = (x-1)f(x) + 1$.
10. Montrer que, pour $x \neq 0, \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \frac{(f(x))^2}{2}$.
11. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
12. La fonction est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?