DS n^o 5 - Corrigé

Problème I : Méthode 1 : Forme de la matrice

1. La matrice T est $\boxed{\text{triangulaire inférieure}}$ donc T^n également et les coefficients diagonaux sont les puissances. Ainsi $T^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ a_n & 2^n & 0 \\ b_n & c_n & 1^n \end{pmatrix}$ avec $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$.
   Puis $T^nT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n+2^n & 2^{n+1} & 0 \\ b_n+c_n+1 & 2c_n+1 & 1 \end{pmatrix}$ et $TT^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n+1 & 2^{n+1} & 0 \\ 1+a_n+b_n & c_n+2^n & 1 \end{pmatrix}$.
   Donc on obtient $\begin{cases} a_{n+1} & = a_n + 2^n = 2a_n + 1 \\ b_{n+1} & = a_n + b_n + 1 = c_n + b_n + 1 \\ c_{n+1} & = 2c_n + 1 = c_n + 2^n \end{cases}$.
   Remarque : On obtient des expressions différentes en effectuant le produit par la gauche ou par la droite. Le mieux est donc de faire les deux qui nous donnent la récurrence la plus riche.
2. On obtient plusieurs méthodes en fonction du résultat de la question précédente :
   Avec les deux produits, on a : $a_n + 2^n = 2a_n + 1$ et $2c_n + 1 = c_n + 2^n$. Puis $a_n = c_n = 2^n - 1$ dans les deux cas.
   Avec un seul des produits :
   Gauche : L'expression $a_{n+1} = 2a_n + 1$ est une suite $\boxed{\text{artihmético-géométrique}}$ de point fixe -1 et de premier terme 0. Donc $a_n = 2^n(0-(-1)) + (-1) = 2^n - 1$.
   Droite : L'expression $a_{n+1} = a_n + 2^n$ et $a_0 = 0$ permet d'écrire :
   $a_n = a_n - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - a_k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1$.
   Les rôles de $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ étant symétrique, on trouve également $c_n = 2^n - 1$.
3. On a $b_0 = 0$ et $b_n = b_n - b_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$ $\boxed{\text{par télescopage}}$.
   Donc $b_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$.
4. On a ainsi trouver $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode 2 : Formule du binôme

5. On pose $A = T - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ afin que $T = I_3 + A$.
6. On calcul $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. Donc A est $\boxed{\text{idempotente}}$ et ainsi $\forall n \geq 1, A^n = A$.
7. On applique la $\boxed{\text{formule du binôme de Newton}}$ avec I_3 et A qui commutent.
   On a $T^n = (I_3 + A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} A^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A = I_3 + (2^n - 1)A$.
   Ainsi on obtient $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 3 : Polynôme annulateur

8. On a $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3T - 2I_3$.
9. On effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ sous la forme :
   $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + R_n(X)$ avec $R_n(X) = a_nX + b_n$.
   En $X = A$, on obtient $A^n = 0 + R_n(A) = a_nA + b_nI_3$.

10. On a $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$.
En $X=1$, on a $1^n=a_n+b_n$.
En $X=2$, on a $2^n=2a_n+b_n$.
On résout le système $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2^n \end{array}\right)$ et on trouve $a_n=2^n-1$ et $b_n=2-2^n$.

11. On a $T^n=(2^n-1)T+(2-2^n)I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n-1 & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 4 : Diagonalisation

12. On applique l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan à la matrice augmenté $(P|I_3)\sim_L (I_3|P^{-1})$. On trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. On calcul $D=P^{-1}TP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

14. On commence par remarquer que $PDP^{-1}=PP^{-1}TPP^{-1}=T$.
Init. $n=0$ On a $T^0=I_3$ et $PD^0P^{-1}=PP^{-1}=I_3$.
Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $T^n=PD^nP^{-1}$.
Donc $T^{n+1}=T^nT=PD^nP^{-1}PDP^{-1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$.

15. On a $T^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n-1 & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$.

Problème II : 1. Notons $h(x)=ax+b$. Pour $x,y\in\mathbb{R}$.
On a $|h(x)-h(y)|=|(ax+b)-(ay+b)|=|a||x-y|$. Donc h est $|a|$-lipschitzienne.

2. Si f est M-lipschitzienne alors $\boxed{\forall x,y\in I, |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|}$.
Etudions la continuité en $x_0\in I$. Soit $x\in I$ au voisinage de x_0.
On a $|f(x)-f(x_0)|\leq M|x-x_0|\to_{x\to x_0} 0$.
Donc par encadrement $|f(x)-f(x_0)|\to_{x\to x_0} 0$. Ainsi $f(x)\to_{x\to x_0} f(x_0)$.
La fonction est continue en x_0 quelconque. Donc continue sur I.

3. Les fonctions Arctan et sin sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus pour $x\in\mathbb{R}$, $|\text{Arctan}'(x)|=\frac{1}{1+x^2}\leq 1$ et $|\sin'(x)|=|\cos(x)|\leq 1$.
Donc d'après $\boxed{\text{l'inégalité des accroissement finies}}$, ce sont des fonctions 1-lipschitzienne.

4. Soit $x,y\in I$. On a $|f(x)-f(y)|\leq \frac{1}{n}|x-y|\to_{n\to+\infty} 0$.
Donc $f(x)=f(y)$ pour tout $x,y\in I$ i.e. f est une fonction constante.

5. Pour $x,y\in I$, on a $f(x),f(y)\in J$.
Donc $|g(f(x))-g(f(y))|\leq M_g|f(x)-f(y)|\leq M_gM_f|x-y|$.
Ainsi $g\circ f$ est, par définition, M_gM_f-lipschitzienne.

6. On combine les questions 1., 3. et 5.
On a Arctan $\circ\, h : x\mapsto \text{Arctan}\,(ax+b)$ est $1\times|a|=|a|$-lipschitzienne.
Et $h\circ\sin : x\mapsto a\sin(x)+b$ est $|a|\times 1=|a|$-lipschitzienne.

7. On montre le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Initialisation : pour $n=1$, on a bien f est M_f-lipschitzienne.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que f^n est M_f^n-lipschitzienne.
On a $f^{n+1}=f^n\circ f$ avec $f(I)\subset I$. D'après la question 5., avec $g=f^n$, on en déduite que la composée est $M_f^n.M_f$-lipschitzienne. Ainsi on a bien f^{n+1} est M_f^{n+1}-lipschitzienne.

8. De la relation $f^2=f\circ f=f$. On en déduit que pour tout $n\geq 1$, $f^n=f$ (l'application f est idempotente pour la composition)
Donc, d'après la question 7., f est $(1/2)^n$-lipschitzienne pour tout $n\geq 1$.
En adaptant, la question 4., en remplaçant la suite $\frac{1}{n}$ par la suite $\frac{1}{2^n}$, on montre que

f est constante. La synthèse est triviale : Les fonctions constantes vérifient $f \circ f = f$ et sont (au moins) (1/2)-contractante car 0-lipschitzienne d'après 1.

Problème III : 1. (a) Par le calcul, on obtient $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A^2 = -A$.

Ainsi $(-A)^2 = (-A)$ donc $(-A)$ est $\boxed{\text{idempotente}}$.

On en déduit que $(-A)^n = -A$ pour tout $n \geq 1$. Puis $A^n = (-1)^{n+1} A$.

(b) On montre $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n \in \mathbb{N}$ l'existence de $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

<u>Initialisation</u> $n = 0$ la valeur $\alpha_0 = 0$ convient à $M^0 = I_3 + \alpha_0 A$.

$n = 1$ par définition de A, on a $M = I_3 + 4A$ donc $\alpha_1 = 4$ convient.

<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = I_3 + \alpha_n A$.

On a $M^{n+1} = M^n M = (I_3 + \alpha_n A)(I_3 + 4A)$ par hypothèse de récurrence $= I_3 + (\alpha_n + 4)A + 4\alpha_n A^2 = I_3 + (\alpha_n + 4 - 4\alpha_n)A$ car $A^2 = -A$.

Donc $\alpha_{n+1} = -3\alpha_n + 4$ convient.

(c) La suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est une suite $\boxed{\text{arithmético-géométrique}}$ de raison -3 et de premier terme 0. Son point fixe $l \in \mathbb{R}$ vérifie $l = -3l + 4$ donc $l = 1$.

Donc $\alpha_n - 1 = (-3)^n(\alpha_0 - 1)$. Puis $\alpha_n = 1 - (-3)^n$.

Ainsi $M^n = I_3 + (1 - (-3)^n)A = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$.

2. (a) L'équation $M = 4B - 3I_3$ se résout en $B = \frac{1}{4}(M + 3I_3) = A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) On a $B^2 = B$. Donc B est un $\boxed{\text{idempotent}}$. On en déduit $B^n = B$ pour $n \geq 1$.

(c) Plusieurs méthodes possibles : adapter la question 1., utiliser la formule du binôme de Newton, à l'aide d'un polynôme annulateur.

$\boxed{\text{Binôme de Newton.}}$ On a $M^n = (4B - 3I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4B)^k (-3I_3)^{n-k} = (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} B = (-3)^n I_3 + [(4-3)^n - (-3)^n]B$.

$\boxed{\text{Polynôme Annulateur.}}$ On a $B^2 = B$ donc $\frac{1}{16}(M + 3I_3)^2 = \frac{1}{4}(M + 3I_3)$. Puis $0 = (M + 3I_3)^2 - 4(M + 3I_3) = (M + 3I_3)(M - I_3)$. Donc $\chi(X) = (X+3)(X-1)$ est un polynôme annulateur. On trouve $M^n = a_n M + b_n I_3$ avec $\begin{cases} 1^n & = a_n + b_n \\ (-3)^n & = -3a_n + b_n \end{cases}$.

3. (a) On a $MX = \lambda X$ ssi $(M - \lambda I_3)X = 0$.

On résout le système homogène associé à $M - \lambda I_3$.

$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -7 - \lambda & 0 & -8 \\ 4 & 1 - \lambda & 4 \\ 4 & 0 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 4 & 1 - \lambda & 4 \\ 4 & 0 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 - \lambda & 4 \\ 4 & 0 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } L_1 \leftarrow L_1/(1 - \lambda) \text{ si } \lambda \neq 1.$$

$$\sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 - \lambda & 0 \\ 0 & -4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1.$$

Si $\lambda \notin \{1, -3\}$, on obtient, après permutation de lignes et colonnes, un système échelonné de rang 3. Donc l'unique solution est $X = 0$.

Si $\lambda = 1$, le système est de rang 1, il admet des solutions non nulles (2 paramètres)
Si $\lambda = -3$, le système est de rang 2, il admet des solutions non nulles (1 paramètre)

(b) On a $M\begin{pmatrix} a\\ b\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a-8\\ 4a+b+4\\ 4a+5\end{pmatrix}$ et $-3\begin{pmatrix} a\\ b\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a\\ -3b\\ -3\end{pmatrix}$.
On résout le système de 2 inconnues et trois équations, on obtient $a = -2$ et $b = 1$.

(c) De même, on obtient des systèmes à résoudre. Puis $c = 0$ et $d = -1$.

(d) On a $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On montre que $(P|I_3) \sim_L (I_3|P^{-1})$ à l'aide du pivot de Gauss-Jordan. On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

(e) Le calcul des coefficients montre que $D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(f) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.
Puis $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ car la matrice est diagonale.
Ceci montrer à nouveau $M^n = \begin{pmatrix} -1+2(-3)^n & 0 & -2+2(-3)^n\\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n\\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n\end{pmatrix}$.

4. (a) Notons $X_n = \begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix}$. Les relations de récurrence s'écrivent $X_{n+1} = MX_n$.
On montre par récurrence que $X_n = M^nX_0$. On en déduit $\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+2(-3)^n)u_0+(-2+2(-3)^n)w_0\\ (1-(-3)^n)u_0+v_0+(1-(-3)^n)w_0\\ (1-(-3)^n)u_0+(2-(-3)^n)w_0\end{pmatrix}$.

(b) On a $u_n = (-1+2(-3)^n)u_0 + (-2+2(-3)^n)w_0 = 2(-3)^n(u_0+w_0) - (u_0+2w_0)$ avec $(-3)^n$ diverge sans limite. Donc (u_n) converge ssi $u_0 + w_0 = 0$.
De même $v_n = (1-(-3)^n)u_0+v_0+(1-(-3)^n)w_0 = (u_0+v_0+w_0)-(-3)^n(u_0+w_0)$ converge ssi $u_0 + w_0 = 0$.
Et $w_n = (1-(-3)^n)u_0 + (2-(-3)^n)w_0 = (u_0+2w_0) - (-3)^n(u_0+w_0)$ converge ssi $u_0 + w_0 = 0$.
Donc les trois suites convergent ssi $u_0 + w_0 = 0$. Dans ce cas, les suites sont constantes égales à leurs premiers termes.

Problème IV : A. Propriété de continuité de f

1. On peut utiliser $\boxed{\text{l'inégalité des accroissements finies}}$ à la fonction exp sur l'intervalle $[0, x]$:
On obtient $\inf_{[0,x]} \exp' \leq \frac{e^x - e^0}{x-0} \leq \sup_{[0,x]} \exp'$.
C'est à dire $1 \leq f(x) \leq e^x$ car $\inf_{[0,x]} \exp' = e^0 = 1$ et $\sup_{[0,x]} \exp' = e^x$
2. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ par opération.
Puis, pour $x \neq 0, f(x) = \frac{e^x-1}{x} = \tau_0\exp(x) \to_{x\to 0} \exp'(0) = 1$ par définition de la dérivabilité. Ainsi f se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = 1$.
3. La fonction exp est strictement convexe car $\exp'' = \exp > 0$.
Donc ses taux d'accroissement sont strictement croissant.
En particulier $f = \tau_0(\exp)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
<u>Remarque</u> : L'étude du signe de la dérivée $f'(x) = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$ donne une méthode valide mais plus calculatoire. Le numérateur est $n(x) = (x-1)e^x + 1$ puis sa dérivée $n'(x) = xe^x$ change de signe en 0. Ainsi n atteint un minimum en 0, et $n(x) > n(0) = 0$ pour $x \neq 0$. Donc le numérateur et le dénominateur de f' sont strictement positifs et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. D'après le $\boxed{\text{Théorème de la bijection continue}}$, $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ réalise une bijection. Le calcul de $I = f(\mathbb{R})$ se fait via les limites en $\pm\infty$.
   On a $f(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \to +\infty$ par croissance comparée.
   Et $f(x) \sim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} \to 0^+$. Donc $I =]0, +\infty[$.

B. Convexité de f

5. Pour $x \neq 0, f'(x) = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$ puis $f''(x) = \frac{(x^2-2x+2)e^x-2}{x^3}$.
   Donc $g(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$.
6. La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = x^2e^x \geq 0$.
   Donc g est croissante et change de signe en 0 car $g(0) = 0$.
   Ainsi g est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.
7. On a $f''(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ avec x^3 qui change de signe en 0 également.
   Donc $f''(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Puis f est convexe sur $\mathbb{R}$.

   <u>Remarque</u> : La convexité (comme la monotonie) est une propriété globale : si f est convexe sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et continue sur $\mathbb{R}$ alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   Comme lorsque f est strictement croissante sur $\mathbb{R} - \{0\}$ est continue alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
8. La fonction f' est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ mais on ne sait pas si elle est définie en 0. Toutefois d'après le $\boxed{\text{Théorème de la limite monotone}}$, il existe des limites à droite et à gauche en tous points. Ainsi $f'(0^+) = \lim_{0^+} f'$ et $f'(0^-) = \lim_{0^-} f'$ existent et sont finie. En particulier la fonction est dérivable à droite et à gauche en 0.

C. Prolongement de la dérivabilité de f

9. Pour $x \neq 0$, on a :$xf'(x) = \frac{(x-1)e^x+1}{x}$ et $(x-1)f(x)+1 = \frac{(x-1)(e^x-1)+x}{x} = \frac{(x-1)e^x+1}{x}$.
   Donc $xf'(x) = (x-1)f(x) + 1$.
10. Pour $x \neq 0, f(2x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{2x} = f(x)\frac{e^x+1}{2}$.
    Donc $f(2x) - f(x) = f(x)\left(\frac{e^x+1}{2} - 1\right) = \frac{f(x)}{2}(e^x - 1) = \frac{f(x)}{2}xf(x)$.
    Ainsi $\frac{f(2x)-f(x)}{x} = \frac{(f(x))^2}{2}$.
11. On reconnaît des expressions de taux d'accroissement dans la question 10. mais la question 8. nous invite à calculer séparément limite à droite et à gauche.
    On peut écrire $\frac{f(2x)-f(x)}{x} = \frac{f(2x)-f(0)}{x} - \frac{f(x)-f(0)}{x} = 2\tau_0(f)(2x) - \tau_0(f)(x) \to_{x\to0^+} 2f'(0^+) - f'(0^+) = f'(0^+)$.
    De même $\frac{f(2x)-f(x)}{x} \to_{x\to0^-} f'(0^-)$.
    Et d'autre part, $\frac{f(2x)-f(x)}{x} = \frac{f(x)^2}{2} \to_{x\to0} \frac{1}{2}$ par limite épointée (gauche/droite inutile).
    Ainsi par unicité des limites, on obtient $f'(0^+) = \frac{1}{2} = f'(0^-)$. Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \frac{1}{2}$.
12. La question 9. permet d'écrire $f'(x) = \frac{(x-1)f(x)+1}{x} = f(x) - \frac{f(x)-1}{x} \to_{x\to0} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
    Donc $f'(x) \to_{x\to0} f'(0)$ et f' est continue en 0. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.