Semaine 16 - Du 27 au 31 Janvier 2026

Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

Révision de la semaine 15

Nombres premiers

Décomposition en produit de premiers, expression du *pgcd* et *ppcm*.
Crible d'Eratosthène. L'ensemble des nombres premiers est infini.
Pour un premier p, $p|ab \Rightarrow (p|a$ ou $p|b)$.

Dénombrement

Soient E et F des ensembles finis.

Opération sur les cardinaux

Cardinal de l'union disjointe et de l'union quelconque.
Cardinal de $E \times F$, le produit cartésien.
Cardinal de $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble de parties de E.
Cardinal de $\mathcal{F}(E,F) = F^E$, l'ensemble des applications de E dans F.

Ensemble fini et application

Conséquence sur les cardinaux de l'injectivité et de la surjectivité de $f : E \to F$.
Equivalence de l'injectivité, de surjectivité et la bijectivité de $f : E \to F$ de même cardinal.

Liste de Questions de cours :

a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $X \neq 0$ vérifiant $AX = \lambda X$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Programmer en Python l'algorithme d'Euclide et démontrer sa terminaison et sa validité.

c) Soit $a, n \geq 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.

d) Démontrer que $\operatorname{Card}(A \uplus B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B)$ pour A et B disjoints.

e) Démontrer que $\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card}(E)\operatorname{Card}(F)$.

f) Démontrer la caractérisation des bijections :
$f : E \to F$ bijective ssi deux des trois f injective, f surjective, $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Exercices d'Application du Cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de solutions de :
   (a) $x + y = n$ pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
   (b) $x + y + z = n$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.
2. On souhaite démontrer, avec deux méthodes indépendantes, qu'il y a autant de parties ayant un nombre pair d'éléments que de parties ayant un nombre impair d'éléments.

   On note $\mathcal{P}_{pair}(E) = \{A \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que } \mathrm{Card}(A) \text{ est pair}\}$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Card}\left(\mathcal{P}_{pair}(E)\right) = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}$.
   En déduire le résultat, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

   (b) Montrer que $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), X \mapsto \begin{cases} X \setminus \{1\} & \text{si } 1 \in X \\ X \cup \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$ est une involution.
   En calculant $\psi\left(\mathcal{P}_{pair}(E)\right)$ démontrer le résultat.

Devoir étoilé (libre)

1. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On souhaite démontrer Le principe des tiroirs : "Si $np+1$ objets sont rangés dans n tiroirs alors au moins un des tiroirs contient $p + 1$ objets."

   On note E l'ensemble des objets et F l'ensemble des tiroirs. Un rangement correspond à une application $f : E \to F$ qui à un objet associe le tiroir dans lequel il est rangé. On suppose par l'absurde que tous les tiroirs contient au plus p objets.

   (a) Si $p = 1$, que peut-on en déduire de l'application f ? En déduire le résultat.
   (b) Démontrer le principe pour $p \geq 2$, en adaptant une démonstration du cours.
2. On considère 51 entiers distincts compris entre 1 et 100.
   (a) Montrer qu'il y a deux entiers consécutifs parmi eux.
   (b) Montrer qu'il y a deux entiers dont la somme vaut 101.

Consignes :
— TD de Lundi : Préparer les exercices 1,2,4 et 5 du TD10.
— Pour les groupes qui n'ont pas de colle de Math cette semaine : Rédiger une des nouvelles questions de cours et un des exercices d'application du cours pour Mardi.
— Devoir libre pour Mardi.