Semaine 16 : Dénombrement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de solutions de :

1. $x + y = n$ pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
2. $x + y + z = n$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

1. Notons $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x + y = n\}$.
   On a $\phi : [\![0, n]\!] \to E_n, x \mapsto (x, n - x)$ est une bijection de réciproque $\phi^{-1}(x, y) = x$.
   Donc $\text{Card}\,(E_n) = n + 1$.
2. Notons $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x + y + z = n\}$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x + y \leq n\}$.
   On a $E = \biguplus_{k=0}^{n} E_k$ et $\psi : E \to F, (x, y) \mapsto (x, y, n - x - y)$ est une bijection de réciproque $\psi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$.
   Donc $\text{Card}\,(F) = \text{Card}\,(E) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\,(E_k) = \sum_{k=0}^{n}(k + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Partie Paire/impaire

On souhaite démontrer, avec deux méthodes indépendantes, qu'il y a autant de parties ayant un nombre pair d'éléments que de parties ayant un nombre impair d'éléments.
On note $\mathcal{P}_{pair}(E) = \{A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\text{Card}(A)$ est pair$\}$.

1. Montrer que $\text{Card}\,(\mathcal{P}_{pair}(E)) = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}$.
   En déduire le résultat, à l'aide de la formule du binôme de Newton.
2. Montrer que $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), X \mapsto \begin{cases} X \setminus \{1\} & \text{si } 1 \in X \\ X \cup \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$ est une involution.
   En calculant $\psi\,(\mathcal{P}_{pair}(E))$ démontrer le résultat.

1. On peut écrire la partition $\mathcal{P}_{pair}(E) = \biguplus_{k \text{ pair}} \mathcal{P}_k(E)$.
   Donc $\text{Card}\,(\mathcal{P}_{pair}(E)) = \sum_{k \text{ pair}} \text{Card}\,\mathcal{P}_k(E) = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}$.
   De même, on obtient $\text{Card}\,(\mathcal{P}_{impair}(E)) = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k}$.
   Or d'après la FBN $\text{Card}\,(\mathcal{P}_{pair}(E)) - \text{Card}\,(\mathcal{P}_{impair}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0^n$.
   Donc il y a autant de parties ayant un nombre pair d'éléments que de parties ayant un nombre impair d'éléments.
2. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$.
   <u>1er cas</u> : si $1 \in X$ alors $\phi(\phi(X)) = \psi(X \setminus \{1\}) = (X \setminus \{1\}) \cup \{1\} = X$.
   <u>2eme cas</u> : si $1 \notin X$ alors $\phi(\phi(X)) = \psi(X \cup \{1\}) = (X \cup \{1\}) \setminus \{1\} = X$.
   Donc $\psi \circ \psi = \text{id}$ est une involution donc une bijection.

   Puis l'application ψ ajoute ou retire un élément (le nombre de 1). Donc l'image d'une partie paire est impaire (et réciproquement). Ainsi $\psi\,(\mathcal{P}_{pair}(E)) = \mathcal{P}_{impair}(E)$. Donc la restriction $\phi : \mathcal{P}_{pair}(E) \to \mathcal{P}_{impair}(E), X \mapsto \psi(X)$ est encore une bijection et permet de démontrer que $\text{Card}\,(\mathcal{P}_{pair}(E)) = \text{Card}\,(\mathcal{P}_{impair}(E))$

Devoir étoilé 16

Lemme des tiroirs

Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On souhaite démontrer Le principe des tiroirs : "Si $np+1$ objets sont rangés dans n tiroirs alors au moins un des tiroirs contient $p+1$ objets."
On note E l'ensemble des objets et F l'ensemble des tiroirs. Un rangement correspond à une application $f : E \to F$ qui à un objet associe le tiroir dans lequel il est rangé. On suppose par l'absurde que tous les tiroirs contient au plus p objets.

1. Si $p = 1$, que peut-on en déduire de l'application f ? En déduire le résultat.
2. Démontrer le principe pour $p \geq 2$, en adaptant une démonstration du cours.

1. Chacun des tiroirs contient au plus 1 objets. C'est à dire que pour tout $y \in F$, y admet au plus un antécédent. L'application f est ainsi injective. Donc on en déduit que $n+1 = \operatorname{Card} E \leq \operatorname{Card} F = n$. Absurde.
2. On dispose de la partition $F = \biguplus_{y \in F} \{y\}$. On en déduit la partition $E = \biguplus_{y \in F} f^* \{y\}$.
   Puis l'hypothèse se traduit par $\operatorname{Card}(f^*\{y\}) \leq p$.
   Donc $np+1 = \operatorname{Card}(E) = \sum_{y \in F} \operatorname{Card}(f^*\{y\}) \leq \sum_{y \in F} p = np$. Absurde.

Utilisation du Lemme des tiroirs

On considère 51 entiers distincts compris entre 1 et 100.

1. Montrer qu'il y a deux entiers consécutifs parmi eux.
2. Montrer qu'il y a deux entiers dont la somme vaut 101.

1. On considère l'ensemble des paires $\{2k-1, 2k\}$ pour $1 \leq k \leq 50$. Cela crée une partition de $[\![1, 100]\!] = \biguplus_{k=1}^{50} \{2k-1, 2k\}$ en 50 parties. Donc deux des entiers sont dans une de ces parties et ils sont en particulier consécutifs.
2. On considère l'ensemble des paires $\{k, 101-k\}$ pour $1 \leq k \leq 50$. Cela crée une partition de $[\![1, 100]\!] = \biguplus_{k=1}^{50} \{k, 101-k\}$ en 50 parties. Donc deux des entiers sont dans une de ces parties et leur somme vaut 101 car ils sont distincts.