TD 22 - Corrigé

Exo 1 : **a)** Pour $x \in E$ et $y = 0 \in E$, on obtient :
$N(x) = dist(x, 0) = dist(f(x), f(0)) = N(f(x))$.

b) On peut utiliser une identité de polarisation $-2\langle x|y\rangle = N^2(x-y) - N^2(x) - N^2(y) = N^2(f(x) - f(y)) - N^2(f(x)) - N^2(f(y)) = -2\langle f(x), f(y)\rangle$.

c) Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i=j}$.
Donc la famille $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est aussi une base orthonormée de E.
Puis la décomposition est $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x)|f(e_i)\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle f(e_i)$ d'après l'invariance.

d) La correspondance $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle f(e_i)$ est bien celle d'une application linéaire de E dans E.
Puis $x \in \mathrm{Ker} f$ ssi $f(x) = 0$ ssi $N(f(x)) = 0$ ssi $N(x) = 0$ ssi $x = 0$. Donc l'application est injective.
Donc f est un automorphisme de E.

Exo 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, on dispose du produit scalaire canonique. Pour $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne
$|\langle u|v\rangle| \leq ||u||.||v||$ avec égalité ssi u et v colinéaires
Donc $|x + 2y + 3z| \leq \sqrt{14}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ avec égalité ssi $(y = 2x$ et $z = 3x)$.

Exo 3 : **a)** On a $\phi_a : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x|a\rangle$ est une application linéaire surjective. En effet, $\mathrm{Im}\phi_a \neq \{0\}$ car $\phi_a(a) = ||a||^2 > 0$ donc $\mathrm{Im}\phi_a = \mathbb{R}$. Puis $H_a = \mathrm{Ker}\phi_a$ est un espace vectoriel de dimension $\dim E - \mathrm{rg}\phi_a = n - 1$ d'après le théorème du rang.

b) Soit $a \in H^\perp$. On a $H^\perp = \mathrm{Vect}\, a$ car $\dim H^\perp = n - (n-1) = 1 = \dim \mathrm{Vect}\, a$ et $\mathrm{Vect}\, a \subset H^\perp$. Puis $H = (\mathrm{Vect}\, a)^\perp = H_a$.

c) Soient $a, b \in E - \{0_E\}$ tels que $H_a = H_b$ alors $(\mathrm{Vect}\, a)^\perp = H_a = H_b = (\mathrm{Vect}\, b)^\perp$ donc $\mathrm{Vect}\, a = \mathrm{Vect}\, b$. Donc a et b sont colinéaires. La réciproque est triviale.

d) Soient $a, b \in E - \{0_E\}$ tels que $\phi_a = \phi_b$ alors $H_a = \mathrm{Ker}\phi_a = \mathrm{Ker}\phi_b = H_b$ donc $a = \lambda b$ car ils sont colinéaires. Puis pour $x \in E, \phi_b(x) = \varphi_a(x) = \langle a|x\rangle = \lambda\langle b|x\rangle = \lambda\phi_b(x)$ donc $\lambda = 1$. Ainsi $\phi_a = \phi_b \Rightarrow a = b$ et la réciproque est triviale.

e) On a $\Phi : E \to G, a \mapsto \phi_a$ est injective d'après la question précédente.
Pour $a, b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in E, \phi_{a+\lambda b}(x) = \langle a + \lambda b|x\rangle = \langle a|x\rangle + \lambda\langle b|x\rangle$ $= \phi_a(x) + \lambda\phi_b(x)$. Donc $\phi_{a+\lambda b} = \phi_a + \lambda\phi_b$. Ainsi Φ est une application linéaire.
Enfin $\dim G = \dim \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R}) = \dim E . \dim \mathbb{R} = \dim E$.
Par caractérisation par la dimension Φ est un isomorphisme.

Exo 4 : $(\Rightarrow)$ On suppose p orthogonal. Pour $x \in E$, on a $p(x) \in \mathrm{Im}p$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}p$ donc $\langle p(x)|x - p(x)\rangle = 0$. Puis $||x||^2 = ||(x - p(x)) + p(x)||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2 \geq ||p(x)||^2$ (Pythagore)
$(\Leftarrow)$ On suppose que pour tout $x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$.
Soit $u \in Kerp$, $v \in Imp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x = \lambda u + v \in E$. Alors $p(x) = p(\lambda u + v) = v$ et $||v||^2 = ||p(x)||^2 \leq ||x||^2 = \lambda^2||u||^2 + 2\lambda\langle u|v\rangle + ||v||^2$. Donc $\lambda^2||u||^2 - 2\lambda\langle u|v\rangle \geq 0$ est un polynôme du second degré toujours positif donc de discriminant négatif. Ainsi $\langle u|v\rangle = 0$. Donc $\mathrm{Ker}p \perp \mathrm{Im}p$ et p est un projecteur orthogonal.

Exo 5 : **a)** On résout en $2x = -z + t$ et $2y = 3z + t$ avec $z, t \in \mathbb{R}$ Donc $F = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

Puis on rend la base orthonormée via le procédé de Gramm-Schmidt $b_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\langle v2|b_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{14}}$ puis $\tilde{b_2} = v_2 - \frac{2}{\sqrt{14}}b_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) On a $F^\perp = \text{Vect}\,(v_3,v_4) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\right]$. Le procédé donne $b_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Puis $\langle b_3|v_4\rangle = \frac{1-1-2}{2} = -1$ et $\tilde{b_4} = v_4 - (-1)b_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ donc $b_4 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$.

c) On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique et $\mathcal{B} = (b_1,b_2,b_3,b_4)$ la base orthonormée. On a $P = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{7} & 1/2 & 3/2\sqrt{5}\\ 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{7} & 1/2 & -1/2\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{14} & -1/\sqrt{7} & -1/2 & 3/2\sqrt{5}\\ 0 & 1/\sqrt{7} & -1/2 & -1/2\sqrt{5}\end{pmatrix}$ la matrice de passage orthogonale donc $P^{-1} =^t P$.

On a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(p) = P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$

$= \begin{pmatrix}-1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{7} & 1/2 & 3/2\sqrt{5}\\ 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{7} & 1/2 & -1/2\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{14} & -1/\sqrt{7} & -1/2 & 3/2\sqrt{5}\\ 0 & 1/\sqrt{7} & -1/2 & -1/2\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 0\\ 2/\sqrt{7} & -1/\sqrt{7} & -1/\sqrt{7} & 1/\sqrt{7}\\ 0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}9 & -7 & -6 & 4\\ -7 & 11 & 8 & -2\\ -6 & 8 & 6 & -2\\ 4 & -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

d) Pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$. On peut calculer $p(u)$ avec la matrice précédente. Puis $d(u,F) = ||u-p(u)||$.

On a $p(1,0,0,1) = \frac{1}{14}(13,-11,-8,6)$ donc $d(u,F)^2 = (1/14)^2 + (11/14)^2 + (8/14)^2 + (8/14)^2 = 250/14^2 = (5\sqrt{10}/14)^2$.

De même, on peut obtenir le résultat pour les vecteurs suivants.

Exo 6 : On note $F = \{\begin{pmatrix}x+z\\x-y\\x+y+2z\end{pmatrix}$ pour $x,y,z\in\mathbb{R}\} = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right] = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right]$.

On dispose donc de $(b_1,b_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ une base orthonormée de F.

On note $v = \begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$ et on recherche $d(v,F)^2$.

Le projeté est $p_F(v) = \langle v|b_1\rangle b_1 + \langle v|b_2\rangle b_2 = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{8}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\-13/3\\11/3\end{pmatrix}$.

Donc $d(v,F)^2 = ||v-p_F(v)||^2 = (-1/3-1)^2 + (-13/3+5)^2 + (11/3-3)^2 = \frac{16+4+1}{9} = \frac{7}{3}$

Exo 7 : On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ munie du produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

L'expression est bien définie car $P(t)Q(t) =_{t\to+\infty} o(e^{t/2})$ donc $e^{-t}P(t)Q(t) =_{t\to+\infty} o(e^{-t/2})$ avec $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ qui converge.

On a $\langle P|Q\rangle = \langle Q|P\rangle$ et $\langle P_1+\lambda P_2|Q\rangle = \langle P_1|Q\rangle + \lambda\langle P_2|Q\rangle$.

Et $\lambda P|P\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 0$ avec égalité ssi $\forall t\in]0,+\infty[, e^{-t}P(t)^2 = 0$ ssi $P=0$ car le polynôme a un nombre infini de racines.

Puis on pose $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $v = X^2 \in E$.

On a $\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^\infty e^{-t}(t^2-at+b)^2\,\mathrm{d}t = dist^2(F,v)$.

Puis $F = \text{Vect}\,(1,X)$ avec $||1||^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}1^2\,\mathrm{d}t = 1$ donc $b_1 = 1$ est unitaire.

$\langle 1,X\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}t\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}t]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-e^{-t})1\,\mathrm{d}t = 1$ par IPP.

Donc $\tilde{b_2} = X - \langle 1,X\rangle 1 = X-1$.

Et $||X-1||^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}(t-1)^2\,\mathrm{d}t = \left[e^{-t}(-(t-1)^2-2(t-1)-2)\right]_0^{+\infty} = 1$ d'où $b_2 = X-1$.

Puis $p_F(v) = \langle v|b_1\rangle b_1 + \langle v|b_2\rangle b_2$

$= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^2\,\mathrm{d}t.1 + \int_0^{+\infty} t^2(t-1)\,\mathrm{d}t.(X-1) = 2 + 4(X-1) = 4X-2$.

Ainsi $dist^2(v,F) = ||v - p_F(v)||^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2-4t+2)^2\,\mathrm{d}t = ... = 4$ (IPP).

Exo 8 : On pose $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1$ unitaire.

Puis $\tilde{b_2} = v_2 - \langle v_2|b_1\rangle b_1 = v_2 + \frac{1}{2}v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Puis $p_F(u) = \langle u|b_1\rangle b_1 + \langle u|b_2\rangle b_2$.

Donc $p_F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x+y+2t}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4x-2y+2t \\ -2x+4y+2t \\ 0 \\ 2x+2y+4t \end{pmatrix}$.

Donc la matrice du projecteur dans la base canonique est : $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exo 9 : **a)** L'intégrale sur le segment est bien définie.
La symétrie est trivial $\langle P|Q\rangle = \langle Q|P\rangle$.
On a $\langle P_1 + \lambda P_2|Q\rangle = \langle P_1|Q\rangle + \lambda\langle P_2|Q\rangle$ par linéarité de l'intégrale.
Puis $\langle P|P\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 0$ avec égalité ssi $\forall t \in]-1,1[, P(t) = 0$ ssi $P = 0$ car le polynôme a une infinité de racines.

b) On part de $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On peut calculer tous les produits scalaire avec $\langle X^a|X^b\rangle = \int_{-1}^{1} t^{a+b}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{2}{a+b+1} & \text{si } a+b \text{ pair} \\ 0 & \text{si } a+b \text{ impair} \end{cases}$.
Donc $||1||^2 = \frac{2}{0+0+1} = 2$. On pose $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puis $\tilde{b_2} = X - \frac{1}{2}\langle X|1\rangle 1 = X$ car $\langle X|1\rangle = 0$.
Et $||X||^2 = \frac{2}{3}$ donc $b_2 = \sqrt{3/2}X$.
Et $\tilde{b_3} = X^2 - \frac{1}{2}\langle X^2|1\rangle 1 - \frac{3}{2}\langle X^2|X\rangle X = X^2 - \frac{1}{3} - 0$.
Puis $||X^2 - 1/3||^2 = ||X^2||^2 - 2\langle X^2|1/3\rangle + ||1/3||^2 = \frac{2}{5} - 2/3\frac{2}{3} + 1/9.2 = \frac{8}{45} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\right)^2$.
Donc $b_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(X^2 - 1/3)$.

c) On a $F = \mathrm{Vect}\,(1, X^2) = \mathrm{Vect}\,(b_1, b_3)$. Donc $p_F(X^2+X+1) = \langle X^2+X+1|b_1\rangle b_1 + \langle X^2+X+1|b_3\rangle b_3$
$= (1/2).(2/3+0+2).1 + (45/8)\langle X^2+X+1|X^2-1/3\rangle(X^2-1/3)$
$= 4/3 + (45/8)[2/5 - (1/3)(2/3) + 0 + 0 + 2/3 - 2/3](X^2-1/3) = X^2+1$.