TD 21 : Séries numériques - Corrigé

Exo 1 : Soit $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$.
La fonction est décroissante donc $g(k) \geq g(t) \geq g(k+1)$.
Puis $g(k) = \int_k^{k+1} g(k)\,\mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1} g(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1} g(k+1)\,\mathrm{d}t = g(k+1)$.
Donc $\sum_{k=1}^{n} g(k) \geq \int_1^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^{n+1} g(k)$.
Ainsi $\int_1^{n+1} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} g(k)$.
Et $g(1) + \sum_{k=2}^{n+1} g(k) \leq g(1) + \int_1^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\sum_{k=1}^{n} g(k) \leq g(1) + \int_1^{n} g(t)\,\mathrm{d}t$.
Puis pour $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On déduit un encadrement en calculant :
$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^n = 2(\sqrt{n} - 1)$.
Donc $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sqrt{n} u_n \leq 1 + 2(\sqrt{n} - 1)$ puis $\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}$. Or les suite $\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}}$ et $\frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}$ tendent vers 2.
Donc $u_n \to 2$ par thm d'encadrement.

Exo 2 : **1.** Si $\sum u_n$ est ACV alors $u_n \to 0$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n| \leq 1$. On en déduit que APCR $0 \leq u_n^2 \leq |u_n| \leq 1$. Donc par comaparaison sur les séries à termes positifs : $\sum u_n^2$ CV car $\sum |u_n|$ converge.

2. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 0}$ est bien positive, décroissante et tend vers 0.
Pourtant $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum \frac{1}{n}$ la série harmonique diverge.

Exo 3 : **1.** On a $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = v_n$ avec $\sum v_n$ converge d'après le CSSA (voir Exo2).

2. On a $u_n - v_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}-(\sqrt{n}+(-1)^n)}{(\sqrt{n}+(-1)^n)\sqrt{n}} = \frac{-1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \sim \frac{-1}{n}$.
Donc la série $\sum(v_n - u_n)$ est de signe constant APCR et de même nature que $\sum \frac{-1}{n}$ càd divergente.
Puis $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ donc $\sum u_n$ DV car $\sum(u_n - v_n)$ DV et $\sum v_n$ CV.

On a $u_n \sim v_n$ avec $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ CV. Ce qui montre que l'hypothèse de positivité (ou signe constant) dans le thm de comparaison est nécessaire.

Exo 4 : Si $q \in]0, 1[$ alors $\frac{q^n}{(1+q^n)^2} \sim q^n$ avec $\sum q^n$ CV. Par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{q^n}{(1+q^n)^2}$ CV.
Si $q = 1$ alors $\frac{q^n}{(1+q^n)^2} = \frac{1}{2}$ DVG (car son terme général ne tend pas vers 0)
Si $q > 1$ alors $\frac{q^n}{(1+q^n)^2} \sim \frac{q^n}{q^{2n}} = q^{-n}$. Or $\sum q^{-n} = \sum \left(\frac{1}{q}\right)^n$ CV comme série géométrique.
Par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{q^n}{(1+q^n)^2}$ CV.

Exo 5 : **1.** On a $\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N}(u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$ comme somme télescopique.
2. Ainsi la série $\sum v_n$ CV ssi la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} v_k$ CV vers une limite finie ssi la suite $u_{n+1} - u_0$ CV vers une limite finie ssi u_n CV.
De plus $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
3. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque. On défini $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ alors $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n = v_n$. la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est un antécédent par l'application linéaire Δ mais n'est pas unique car KerΔ est l'ensemble des applications constantes.
Remarque : On a donc ici Δ pour les suites est l'analogue de la dérivation pour les fonctions.
Et $\sum_{n=0}^{+\infty}(\Delta u)_n = \lim_{n\to+\infty} -u_0$ est l'analogue de $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ le thm fondamentale de l'analyse différentielle.

4. On a $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 1$.

On a $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ avec $\sqrt{n}\to+\infty$ donc la série DV

On a : $\frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1/2}{n-1} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1}$ éléments simples.
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.
avec $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \to 0$ donc la série converge et $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{4}$.

On a $\sin\frac{\pi}{4n^2-1}\sin\frac{2n\pi}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n^2-1} - \cos\frac{(2n+1)\pi}{4n^2-1}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2n-1}$ avec $\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2n+1} \to \frac{\cos 0}{2} = 1/2$.
Donc la série CV et $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{4n^2-1}\sin\frac{2n\pi}{4n^2-1} = 1/2 - \frac{1}{2}\cos\pi = 1$.

On a $\frac{1}{n+1}\big(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{\ln n}{n}\big) = \frac{1}{n+1}\left(\ln(n+1) - \frac{n+1}{n}\ln(n)\right) = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}$. avec $\frac{\ln n}{n}\to 0$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\big(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{\ln n}{n}\big) = 0 - \frac{\ln 1}{1} = 0$.

Exo 6 : $\otimes$ $\sum\frac{2^n+5}{3^n-11}$: On a $\frac{2^n+5}{3^n-11}\sim(2/3)^n$ avec $\sum(2/3)^n$ CV en tant que série géométrique. Donc par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, la série CV.

$\otimes$ $\sum\frac{n^2}{2^n}$: On note $u_n = \frac{n^2}{2^n} > 0$ le terme général de la série. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^2/n^2.2^n/2^{n+1} \to \frac{1}{2} < 1$. Donc d'après la règle d'Alembert, la série CV.

$\otimes$ $\sum\frac{2^n}{n!}$: On note $u_n = \frac{2^n}{n!} > 0$ le terme général de la série. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$. Donc d'après la règle d'Alembert, la série CV.

$\otimes$ $\sum\frac{1}{n^2}$: CV comme série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

$\otimes$ $\sum n^{lna}(a>0)$: CV ssi $-\ln a > 1$ ssi $a < 1/e$ comme série de Riemann.

$\otimes$ $\sum\frac{\ln n}{n}$: On a $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq e$ avec $\sum\frac{1}{n}$ la série harmonique DV. Donc par thm de comparaison (APCR) sur les séries à termes positifs, la série DV.

$\otimes$ $\sum n^2\sin(2^{-n})$: On a $n^2\sin(2^{-n}) \sim \frac{n^2}{2^n} = o((3/4)^n)$ avec $\sum(3/4)^n$ CV. Donc par thm de comparaison (APCR) sur les séries à termes positifs, la série CV.

$\otimes$ $\sum\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$: On a $0 \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{3}$ APCR. Donc $0 \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ Avec la série $\sum(2/3)^n$ CV donc par thm de comparaison la série CV.
<u>Attention</u> : On ne peut pas passer à la puissance n dans un équivalent. Donc $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ n'est pas équivalent à $(1/2)^n$.

$\otimes$ $\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, On a $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2\ln(1-1/n)\right) = \exp(n^2(-1/n - 1/2n^2 + o(1/n^2))) = e^{-n-1/2}e^{o(1)} \sim \frac{1}{\sqrt{e}}e^{-n}$. Car $o(1)\to 0$ donc $e^{o(1)}\to 1$ càd $e^{o(1)}\sim 1$.
Puis $\sum e^{-n}$ CV en tant que série géométrique de raison $1/e < 1$.
Donc par thm de comparaison sur les séries à termes positifs $\sum u_n$ CV.

$\otimes$ $\sum\frac{1}{\binom{2n}{n}}$, On note $u_n = \binom{2n}{n}^{-1} = \frac{n!^2}{2n!} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = o(1/2)^n$ d'après les intégrales de Wallis. Donc $\sum u_n$ CV.
Une méthode plus élémentaire est la règle d'Alembert :
On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to 1/4 < 1$ donc la série $\sum u_n$ CV.

$\otimes$ $\sum\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{n}$, On a $\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{n} = \frac{\ln(1+1/n)}{n} \sim \frac{1/n}{n} = 1/n^2$ avec $\sum 1/n^2$ CV. Donc par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, la série CV.

$\otimes$ $\sum\frac{\ln(n)}{n^2}$, On a $\frac{\ln}{n^2} = o(\sqrt{n}/n^2) = o(1/n^{3/2})$ avec $\sum 1/n^{3/2}$ une série de Riemann CV. Donc par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, la série CV.

$\otimes$ $\sum\frac{n+\ln n}{n^2+1}$, On a $\frac{n+\ln n}{n^2+1} \sim 1/n$ avec $\sum 1/n$ DV. Donc par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, la série DV.

$\otimes$ $\sum\frac{1}{n^3\ln n}$, On a $\frac{1}{n^3\ln n} = o(1/n^3)$ avec $\sum 1/n^3$ CV. Donc par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, la série CV.

$\otimes$ $\sum\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$, On a $\frac{1}{\sqrt{n}\ln n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = 1/n$ avec $\sum 1/n$ DV. Donc par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, la série DV.

$\otimes$ $\sum e^{-\sqrt{n}}$, On a $e^{-\sqrt{n}} = o(1/n^2)$ avec $\sum 1/n^2$ CV. Donc par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, la série CV.

$\otimes$ $\sum \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$, On note $u_n = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$ et on a $\ln u_n = (2n+1)\ln\frac{3n}{4n-1} = -(2n+1)\ln(4/3-1/3n) = -(2n+1)[\ln(4/3)+\ln(1-1/4n)] = -(2n+1)[\ln(4/3)-1/4n+o(1/n)] = -2\ln(4/3)n + [1/2-\ln(4/3)] + o(1)$.

Donc $u_n \sim Ce^{-2\ln(4/3)n}$ avec $C = \exp[1/2-\ln(4/3)]$ avec $\sum e^{-2\ln(4/3)n}$ CV comme série géométrique de raison $e^{-2\ln(4/3)} = 9/16 < 1$. Donc par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, la série CV.

$\otimes$ $\sum \frac{a^n}{1+b^n}(a,b>0)$, Si $b<1$ alors $\frac{a^n}{1+b^n} \sim a^n$ la série CV ssi $a<1$.

Si $b=1$ alors $\frac{a^n}{1+b^n} \sim a^n/2$ la série CV ssi $a<1$.

Si $b>1$ alors $\frac{a^n}{1+b^n} \sim (a/b)^n$ la série CV ssi $a<b$.

$\otimes$ $\sum \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n+2^{\sqrt{n}}}(a,b>0)$, Si $b \leq 1$ alors $\frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n+2^{\sqrt{n}}} \sim \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}} = a^n$ la série CV ssi $a<1$.

Si $b>1$ alors $\frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n+2^{\sqrt{n}}} \sim (a/b)^n 2^{\sqrt{n}}$ la série CV ssi $a/b<1$ ssi $a<b$.

En effet $\sum q_1^n q_2^{\sqrt{n}}$ CV ssi $q_1<1$ car d'après la règle d'Alembert :

$\frac{q_1^{n+1}q_2^{\sqrt{n+1}}}{q_1^n q_2^{\sqrt{n}}} = q_1 q_2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \to q_1$ car $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 0$.

$\otimes$ $\sum (n^6+3)^a - (n^2+2)^{3a} (a \in \mathbb{R})$

On a $(n^6+3)^a = n^{6a}(1+3/n^6)^a = n^{6a}\left(1+a3/n^6+o(1/n^6)\right) = n^{6a}+3an^{6a-6}+o(n^{6a-6})$

Et $(n^2+2)^{3a} = n^{6a}\left(1+2/n^2\right)^{3a} = n^{6a}\left(1+6a/n^2+3a(3a-1)/2(4/n^4)+o(1/n^4)\right) = n^{6a}+6an^{6a-2}+6a(3a-1)n^{6a-4}+o(n^{6a-4})$.

Donc $(n^6+3)^a-(n^2+2)^{3a} = -6an^{6a-2}-6a(3a-1)n^{6a-4}+o(n^{6a-4}) \sim -6an^{6a-2}$ si $a \neq 0$.

Or $\sum n^{6a-2}$ CV ssi $6a-2<-1$ ssi $a<-1/2$ en tant que série de Riemann. Si $a=0$ la série est nulle donc CV.

Exo 7 : On suppose $\sum u_n$ CV alors $u_n \to 0$ donc $\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$. Par thm de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ CV.

Réciproquement si $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ CV alors $\frac{u_n}{1+u_n} \to 0$ donc $u_n - \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{u_n^2}{1+u_n}$ avec $0 \leq \frac{u_n^2}{1+u_n} \leq \frac{u_n}{1+u_n}$. Donc la série $\sum \frac{u_n^2}{1+u_n}$ CV par thm de comparaison et donc $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ CV comme combinaison linéaire.

Exo 8 : On note $u_n = \frac{n!}{n^n}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \exp\left[n\ln(1-1/(n+1)\right] \sim \exp(-n/(n+1)) \to \frac{1}{e} < 1$. Donc la série $\sum u_n$ CV par la règle d'Alembert.

On note $v_n = \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$. On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{1+a^{n+1}} \to \begin{cases} 1 & \text{si } a<1 \\ 1/2 & \text{si } a=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Donc la règle d'Alembert montre que pour $a \geq 1$ la série converge et sinon on ne sait pas.

On note $w_n = \frac{5^n n^2}{7^n}$. On a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{5}{7}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to \frac{5}{7} < 1$. Donc $\sum w_n$ CV.

Exo 9 : 1. On a $b_n - b_{n-1} = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \ln\left(n!/(n-1)!e^n/e^{n-1}(n-1)^{n-1}/n^n\sqrt{n-1/n}\right) = \ln\left[ne((n-1)/n)^{n-1+1/2}/n\right] = 1+(n-1/2)\ln(1-1/n) =_{n\to+\infty} 1+(n-1/2)(-1/n-1/2n^2+O(1/n^3)) = 0+0/n+O(1/n^2)$.

Or $\sum 1/n^2$ CV donc la série $\sum b_n - b_{n-1}$ est ACV donc CV.

Puis cette série télescopique montre que la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie.

2. On note $l = \lim b_n$. Donc $a_n \sim e^l$. Puis par opération $n! \sim e^l\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$. Reste à déterminer la valeur de $C = e^l > 0$. On a $\pi \sim \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2} \sim 2^{4n}\frac{C^4(n/e)^{4n}n^2}{nC^2(2n/e)^{4n}2n} \sim \frac{C^2}{2}$. Donc $C^2 = 2\pi$ puis $C = \sqrt{2\pi}$.

3. On a $\frac{(2n)!}{n!a^n n^n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n/e)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n a^n n^n} \sim \sqrt{2}\left(\frac{4}{ae}\right)^n$. Donc la série CV ssi $ae>4$ ssi $a>4e^{-1}$.

Exo 10 : 1. On a $|a_n| = |b_n| = |t|^n$ avec $\sum |t|^n$ CV en tant que série géométrique. Donc les séries sont ACV.

On peut en déduire que leurs produit de Cauchy $\sum c_n$ est également ACV.

2. On a $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} t^k (-t)^{n-k} = t^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} = \begin{cases} t^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.

3. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pour $q \in]-1,1[$ d'après le cours.

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-t}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \frac{1}{1+t}$.

Puis $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} = \frac{1}{1-t^2}$.

On a bien $\frac{1}{1-t}\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-t^2}$.

Exo 11 : 0. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont CV d'après le CSSA mais elle ne sont pas ACV.

1. On a $c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{(-1)^{n-k}}{\ln(n-k+2)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(n-k+2)}$. Or $|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(n-k+2)} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(n+2)} = \frac{1}{\ln(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \to 1$.

Donc on ne peut pas avoir $c_n \to 0$ et la série $\sum c_n$ DVG.

2. On étudie $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)}$. Puis $|w_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1/(n+2)}{k+1} + \frac{1/(n+2)}{n-k+1} = \frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$ avec le changement de variables $k \to n-k$

Puis $|w_{n+1}| - |w_n| = \frac{2}{n+3}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+1} - \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{(n+3)(n+2)} + \left(\frac{2}{n+3} - \frac{2}{n+3}\right)\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$ $= \frac{2}{(n+3)(n+2)} - \frac{2}{(n+3)(n+2)}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \leq 0$.

Donc la suite $|w_n|$ est décroissante. De plus $|w_n| = \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sim \frac{\ln n}{n} \to 0$.

Donc d'après le CSSA, la série $\sum w_n$ CV.

Remarque : Dans le cas où les séries sont CV mais ne sont pas ACV, ils existent des produits de Cauchy DV (ex 1.) et des produits CV (ex 2.)

Exo 12 : 1. Faux $\sum \frac{1}{n}$ la série harmonique DV.

2. Faux pour $u_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 2^{-n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

La série $\sum u_n$ CV mais la suite (u_n) n'est pas monotone.

3. Faux pour $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\sum u_n$ CV et $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ DV.

4. Vrai car APCR $0 < u_n^2 \leq u_n \leq 1$. Donc on obtient le résultat par comparaison sur les séries à termes positifs.

5. Faux ceci montre $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$ mais ne suffit pas à la obtenir la CV. En effet, $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln n} \sim \frac{(-1)^n}{n}$. On a $\sum u_n$ DV comme combinaison linéaire entre $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV et $\sum \frac{1}{n \ln n}$ DV. Car on peut comparer à une intégrale avec $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$ décroissante positive sur $[e, +\infty[$ et $\int_e^N \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln\ln t]_e^N = \ln\ln N \to +\infty$.

6. Vrai ceci montre que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^2}$ donc $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$ puis la série est ACV donc CV.