TD 20 : Intégration - Corrigé

Exo 1 : On utilise les sommes de Riemann :

On a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{2+\cos(\frac{k\pi}{n})} = \sin(\pi/n) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}$
$\sim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\cos(k\pi/n)} \to_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos(t)}$ avec $t_k = \frac{k\pi}{n}$
$= \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u/(1+u^2)}{2+(1-u^2)/(1+u^2)}$ avec la règle de Bioche $u = \tan(t/2)$ qui est un changement de variable bijectif et justifiant donc la convergence de l'intégrale.
$= \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{3+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}[\mathrm{Arctan}\,(u/\sqrt{3})]_0^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

On a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}\mathrm{Arctan}\,\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k/n)\mathrm{Arctan}\,(k/n)$
$\to_{n\to+\infty} \int_0^1 t\mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t$ avec $t_k = k/n$
$= [\frac{t^2}{2}\mathrm{Arctan}\,(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ par IPP.
$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[t - \mathrm{Arctan}\,(t)]_0^1$ par décomposition en éléments simples
$= \frac{\pi}{8} - \frac{1-\pi/4}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Enfin on passe au logarithme pour transformer produit en somme :
$\ln\left(n^2\left(\prod_{k=1}^n k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}\right) = 2\ln(n) - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^n k\ln k$
$= 2\ln(n) - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^n [k\ln(k/n) + k\ln n] = 2\ln(n) - \frac{4}{n^2}\left[\sum_{k=1}^n k\ln(k/n) + \frac{n(n+1)}{2}\ln(n)\right]$
$= (2 - \frac{4n(n+1)}{2n^2})\ln n - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^n (k/n)\ln(k/n)$.
D'une part $(2 - \frac{4n(n+1)}{2n^2})\ln n = \left(2 - 2 - \frac{2}{n}\right)\ln n = \frac{-2\ln n}{n} \to 0$.
D'autre part $\frac{4}{n}\sum_{k=1}^n (k/n)\ln(k/n) \to 4\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t$ avec $t_k = k/n$.
L'intégrale est faussement impropre en 0 car $t\ln t \to_{t\to 0} 0$ puis on a la calcul par IPP.
$\int_0^1 t\ln t = [\frac{t^2}{2}\ln t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 - [\frac{t^2}{4}]_0^1 = \frac{-1}{4}$.
Par combinaison linéaire, on obtient $\ln\left(n^2\left(\prod_{k=1}^n k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}\right) \to 1$.
Puis $\left(n^2\left(\prod_{k=1}^n k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}\right) \to e^1 = e$.

Exo 2 : (Intégrale de Dirichlet)

a) On a déjà $f(x)\frac{\sin(x)}{x} \sim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$. Donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$.
Puis $|f(x)| = \frac{|\sin(x)-\sin(0)|}{|x-0|} \leq \sup_{0\leq y\leq x} |\sin'(y)| \leq 1$ d'après l'Inégalité des accroissements finis.

b) Soit $x \geq \pi/2$. On a $\int_{\pi/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^x \frac{1}{t}\sin t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{\pi/2}^x - \int_{\pi/2}^x \frac{+\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Puis $\left|\int_{\pi/2}^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\pi/2}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_{\pi/2}^x = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{x}$.
Et $\left|\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{\pi/2}^x\right| = \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$.
Donc $\left|\int_{\pi/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{\pi/2}^x\right| + \left|\int_{\pi/2}^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} - \frac{1}{x} = \frac{2}{\pi}$.

c) Le prolongement de f en 0 démontre que $C = \int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie comme convergent. Puis pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe d'après la convergence en 0. C'est bien une primitive de f d'après le thm fondamentale de l'analyse différentielle.
Puis $|F(x)| \leq \left|\int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{\pi/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |C| + \frac{2}{\pi}$ est bien borné.
Remarque : Ceci démontre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge pourtant elle ne converge pas absolument.

Exo 3 : On note $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ la primitive de f qui s'annule en 0 (Thm fonda). On en déduit $g(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \to_{x\to 0} F'(0)$ car F est dérivable en 0. Donc $\lim_0 g = f(0)$.

Exo 4 : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Le polynôme $P(X) = \int_a^b (f(t) + Xg(t))^2 \,\mathrm{d}t = (\int_a^b g^2)X^2 + 2(\int_a^b fg)X + (\int_a^b f^2)$.
Donc son discriminant est $\Delta = 4(\int_a^b fg)^2 - 4(\int_a^b g^2)(\int_a^b f^2)$. Or pour $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Donc $\Delta \leq 0$ puis $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt$.
De plus, on a égalité ssi $\Delta = 0$ ssi il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ racine double de P
ssi $\int_a^b (f(t) + x_0 g(t))^2 \,\mathrm{d}t = 0$ ssi $\forall t \in [a,b], f(t) + x_0 g(t) = 0$ ssi f et g colinéaires.

Exo 5 : On a $F(x) = [-\cos(t)]_x^{x^2} = \cos(x) - \cos(x^2)$. Donc F est dérivable comme composée de fonction C^∞. Et $F'(x) = -\sin(x) + 2x\sin(x^2)$.
Remarque : La dérivée d'une intégrale n'est pas trivial, mais respecte la formule pour a, b des fonctions dérivables et f une fonction continue :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x)).$$

Exo 6 : On raisonne par majoration. En utilisant le théorème des bornes atteintes : f est continue sur un segment $[0,1]$ donc il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [0,1], |f(t)| \leq C$.

On a $0 \leq |I_n| \leq \int_0^1 \left|\frac{f(t)}{t+n}\right| \,\mathrm{d}t$ par l'inégalité triangulaire
$\leq \int_0^1 \frac{C}{t+n}\,\mathrm{d}t = [C\ln(t+n)]_0^1 = C\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \to 0$.
Donc $I_n \to 0$ par encadrement.

De même $0 \leq |J_n| \leq \int_0^1 |t^n f(t)| \,\mathrm{d}t$ par l'inégalité triangulaire
$\leq \int_0^1 Ct^n \,\mathrm{d}t = \left[C\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{C}{n+1} \to 0$.
Donc $J_n \to 0$ par encadrement.

Enfin $0 \leq |K_n| \leq \int_0^1 \left|\frac{f(t)}{1+nt}\right| \,\mathrm{d}t$ par l'inégalité triangulaire
$\leq \int_0^1 \frac{C}{1+nt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{C}{n}\ln(1+nt)\right]_0^1 = C\frac{\ln(n+1)}{n} \to 0$.
Donc $K_n \to 0$ par encadrement.

Exo 7 : **a)** On a $f_1(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+3x+2)} = \frac{1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{1/5}{x+2} + \frac{(-1/5)x+2/5}{x^2+1}$.
Donc $\int_0^1 f_1 = [\frac{1}{5}\ln(x+2) - \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\text{Arctan}\,(x)]_0^1 = \frac{1}{5}\ln(3) + \frac{\pi}{10} - \frac{3}{10}\ln(2)$.

b) La fonction $t \mapsto g(t)f_n(t)$ est bien définie et continue sur le segment $[0,1]$ donc l'intégrale $u_n = \int_0^1 g(t)f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie. Puis $|u_n| \leq \int_0^1 |g(t)||f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ par l'inégalité triangulaire
$\leq \sup_{[0,1]}|g| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n(t+2)}$ d'après le thm des bornes atteintes avec gC^0 sur un segment
$\leq \sup_{[0,1]}|g| \int_0^1 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\sup_{[0,1]}|g|$.
Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

c) La fonction f_n est continue, strictement décroissante et positive sur $[0,1]$ car $t \mapsto \frac{1}{t+2}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ le sont.
Donc f_n réalise une bijection de $[0,1]$ vers $f_n([0,1]) = [f_n(1), f_n(0)] = [\frac{2^{-n}}{3}, \frac{1}{2}]$.
On a bien $2^{-n} \in [\frac{2^{-n}}{3}, \frac{1}{2}]$, donc il admet un unique antécédent $x_n \in [0,1]$.

d) On sait que $f_n(x_n) = 2^{-n}$ puis $f_{n+1}(x_n) = \frac{1}{(x_n^2+1)^{n+1}(x_n+2)} = \frac{1}{x_n^2+1}f_n(x_n) = \frac{2^{-n}}{x_n^2+1} \geq \frac{2^{-n}}{2} = 2^{-n-1} = f_{n+1}(x_{n+1})$.
Puis $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$ donc $x_n \leq x_{n+1}$ car f_{n+1} est une bijection décroissante.
Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

e) La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante et bornée car $x_n \in [0,1]$. Donc le théorème de convergence monotone montre qu'elle admet une limite finie. On note $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$. On a $2^{-n} = \frac{1}{(x_n^2+1)^n(x_n+2)}$ donc $(x_n^2+1)^n = \frac{2^n}{(x_n+2)}$ puis $n\ln(1+x_n^2) = n\ln(2) - \ln(2+x_n) \sim_{n\to+\infty} n\ln(2)$. Or $n\ln(1+x_n^2) \sim_{n\to+\infty} n\ln(1+l^2)$. Donc $\ln(2) = \ln(1+l^2)$ et $l = 1$ car $l \geq 0$.

Exo 8 : **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $I_{n+1} - I_n = \int_1^e (\ln t)^{n+1} - (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$ par linéarité
$= \int_1^e (\ln t)^n(\ln t - 1)\,\mathrm{d}t \leq 0$ car pour $1 \leq t \leq e$, $\ln t \geq 0$ et $\ln t - 1 \leq 0$.
Donc la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
On a $I_1 = \int_1^e \ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_1^e = 1$.

b) On a $I_{n+1} = \int_1^e 1 \times (\ln t)^{n+1}\,\mathrm{d}t = [t(\ln t)^{n+1}]_1^e - \int_1^e t\frac{n+1}{t}(\ln t)^n\,\mathrm{d}t$ par IPP
$= e - (n+1)I_n$.

c) On a $I_n \geq 0$ car pour $t \in [1,e], \ln t \geq 0$. Donc $(n+1)I_n \geq 0$.
Puis $0 \leq I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ donc $(n+1)I_n \leq e$.

d) On en déduit $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \to 0$. Donc $I_n \to 0$ par thm d'encadrement.
Puis $nI_n = (n+1)I_n - I_n = e - I_{n+1} - I_n \to e$.
Remarque : On en déduit que $I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{e}{n}$.

Exo 9 : On a $0 = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [f(t) - f(t)^2]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(1-f(t))\,\mathrm{d}t$.
Or pour tout $t \in [0,1], f(t) \in [0,1]$ donc $f(t)(1-f(t)) \geq 0$.
Donc par stricte positivité de l'intégrale, on déduit que pour tout $t \in [0,1], f(t)(1-f(t)) = 0$.
C'est à dire $f(t) \in \{0,1\}$. Or f est continue donc par le TVI si elle n'était pas constante elle vaudrait une fois 0 et une fois 1 donc prendrait toutes les valeurs intermédiaires ce qui est absurde. Donc f est constante égale à 0 ou égale à 1.

Exo 10 : D'après le thm de la borne atteinte, il existe $c_+, c_- \in [a,b]$ tel que $f(c_+) = \sup_{[a,b]}|f|$ et $f(c_-) = \inf_{[a,b]}|f|$.
Puis pour $t \in [a,b], f(c_-)g(t) \leq f(t)g(t) \leq f(c_+)g(t)$ car $g(t) \geq 0$.
Donc par croissance de l'intégrale $f(c_-)\int_a^b g \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(c_+)\int_a^b g$.
Ainsi $\lambda = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t / \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est une valeur intermédiaire pour la fonction f continue entre c_- et c_+. Donc d'après le TVI, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$ càd $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

Exo 11 : On réalise les décompositions en éléments simples pour pouvoir primitiver.

On a $f_1(x) = \frac{x^4+1}{x^3-1} = \frac{x(x^3-1)+x+1}{x^3-1} = x + \frac{x+1}{x^3-1}$ par division euclidienne
$= x + \frac{x+1}{(x-1)(x-j)(x-j^2)} = x + \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ par factorisation sur $\mathbb{R}[X]$
$= x + \frac{a}{x-1} + \frac{b(x+1/2)}{x^2+x+1} + \frac{c}{x^2+x+1}$ avec $a = \frac{1+1}{1+1+1} = 2/3$ (multiplier par $(x-1)$ et $x=1$) puis $\frac{b(x+1/2)}{x^2+x+1} + \frac{c}{x^2+x+1} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{2/3}{x-1} = \frac{3(x+1)-2(x^2+x+1)}{3(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-2x^2+x+1}{3(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-2x-1}{3(x^2+x+1)}$.
Donc $b = -2/3$ et $c = 0$.
Donc $f_1(x) = x + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\frac{x+1/2}{x^2+x+1}$ admet pour primitive
$F_1(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}(x^2+x+1)$.

On a $f_2(x) = \frac{x^3-4x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+2^2}$
Puis $x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = (ax+b)(x^2+4) + (cx+d)(x^2+1) = (a+c)x^3 + (b+d)x^2 + (4a+c)x + (4b+d)$
Donc $a+c = 1$ et $4a+c = 2$ se résout en $a = 1/3$ et $c = 2/3$.
Et $b+d = -4$ et $4b+d = 1$ se résout en $b = 5/3$ et $d = -17/3$.
Ainsi une primitive de f_2 est
$F_2(x) = (1/3)\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + (5/3)\mathrm{Arctan}\,(x) + (2/3)\frac{1}{2}\ln(4+x^2) + (-17/3)\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,(x/2)$.

On a $f_3(x) = \frac{x^3+x^2}{x^3+x} = 1 + \frac{x^2-x}{x^3+x}$ par division euclidienne
$= 1 + \frac{x-1}{x^2+1} = 1 + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$
admet pour primitive $F_3(x) = x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}\,(x)$.

On a $f_4(x) = \frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x/2+1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1/4)^2+(\sqrt{7}/4)^2}$ admet pour primitive
$F_4(x) = \frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{7}}\mathrm{Arctan}\,\left(\frac{x+1/4}{\sqrt{7}/4}\right) = \frac{2\sqrt{7}}{7}\mathrm{Arctan}\,\left(\frac{\sqrt{7}(4x+1)}{7}\right)$.