

TD 18 - Corrigé

Exo 1 : a) On a $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \text{ on développe suivant } L_1$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} \text{ on factorise } C_1 \text{ par } b-a \text{ et } C_2 \text{ par } c-a.$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b).$$

b) On développe suivant C_4 :

$$P(x) = -1 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + x^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= -abcD_1 + xD_3 - x^2D_2 + x^3D_1.$$

On a factorisé dans le premier déterminant C_1 par a , C_2 par b et C_3 par c .

Ainsi si $D_1 \neq 0$ i.e a, b et c 2 à 2 distincts alors $\deg P = 3$. Sinon $P = 0$.

c) On suppose a, b et c 2 à 2 distincts.

On a $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ car dans le déterminant il y a deux colonnes identiques.

Ainsi $P(X) = D_1(X-a)(X-b)(X-c)$ car on a trouvé trois racines simples d'un polynôme de degré 3 et de coefficient dominant D_1 .

Ainsi $P(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)(x-c)$.

Puis en développant, on obtient $P(X) = D_1(X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc) = D_1X^3 - D_2X^2 + D_3X - abcD_1$.

En identifiant les coefficients, on trouve $D_2 = (a+b+c)D_1 = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$ et $D_3 = (ab+bc+ca)D_1 = (ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b)$.

Exo 2 : On a $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \text{ par } L_1 \leftarrow \sum_{k=1}^4 L_k$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \text{ on factorise } L_1$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -x & z-x & y-x \\ y & z-y & -y & x-y \\ z & y-z & x-z & -z \end{vmatrix} \text{ par } C_i \leftarrow C_i - C_1 \text{ pour } i = 2, 3, 4.$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} -x & z-x & y-x \\ z-y & -y & x-y \\ y-z & x-z & -z \end{vmatrix} \text{ on développe suivant } L_1.$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} -x+y-z & 0 & y-x-z \\ 0 & -y+x-z & x-y-z \\ y-z & x-z & -z \end{vmatrix} \text{ par } L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \text{ et } L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$= (x+y+z)(y-x-z)(x-y-z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ y-z & x-z & -z \end{vmatrix} \text{ on factorise } L_1 \text{ et } L_2.$$

$$= (x+y+z)(y-x-z)(x-y-z)[-z - (y-z) - (x-z)] \text{ d'après la règle de Sarrus.}$$

$$= (x+y+z)(y-x-z)(x-y-z)(z-x-y).$$

Donc l'ensemble géométrique est l'union des quatre droites d'équation :

$$x+y+z=0, x=y+z, y=x+z \text{ et } z=x+y.$$

Exo 3 : a) On peut développer par rapport à L_1 puis par rapport à C_1 et on obtient :

$$P_n(x) = -xP_{n-1}(x) - 1P_{n-2}(x)$$

- b) On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son polynôme caractéristique est $X^2 + \lambda X + 1$ avec $\Delta = \lambda^2 - 4$.

Si $\lambda \in \{2, -2\}$ alors $\Delta = 0$ et $u_n = (\mu_1 n + \mu_2)(-\lambda/2)^n \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(n(-\lambda/2)^n, (-\lambda/2)^n)$.
Sinon il existe $\delta \in \mathbb{C}^*$ tel que $\delta^2 = \Delta$ on pose $q_1 = \frac{-\lambda+\delta}{2}$ et $q_2 = \frac{-\lambda-\delta}{2}$. L'espace est alors $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(q_1^n, q_2^n)$.

- c) On a $P_n(\lambda) + \lambda P_{n-1}(\lambda) + P_{n-2}(\lambda) = 0$ donc $P_n(\lambda) = \mu_1 q_1^n + \mu_2 q_2^n$.
Or $P_0(\lambda) = 1$ et $P_1(\lambda) = -\lambda = q_1 + q_2$. Donc on résout le système et $P_n(\lambda) = \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_2 - q_1}$.

Donc $P_n(\lambda) = 0$ ssi $q_1^{n+1} = q_2^{n+1}$ et $q_1 \neq q_2$ ssi $q_1 = \omega q_2$ avec $\omega \in \mathbb{U}_{n+1} - \{1\}$ ssi $(-\lambda + \delta) = e^{2ik\pi/(n+1)}(-\lambda - \delta)$ ssi $\delta = \lambda \frac{1 - e^{i\theta_k}}{1 + e^{i\theta_k}} = -i\lambda \tan(\theta_k/2)$ avec l'arc moitié.

Puis $\delta^2 = \Delta = \lambda^2 - 4$. Donc $\lambda^2 - 4 = -\lambda^2 \tan^2(\theta_k/2)$

puis $\lambda^2 = \frac{4}{1 + \tan^2(\theta_k/2)} = 4 \cos^2(\theta_k/2)$.

Ainsi $\lambda \in \{2 \cos(\frac{k\pi}{n+1}) \text{ pour } 1 \leq k \leq n\}$ est l'ensemble des racines du polynôme.

Exo 4 : On a :
$$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (\prod_{k=1}^n a_k) \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \text{ en factorisant les colonnes}$$

$$= (\prod_{k=1}^n a_k) \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ n-1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow \sum_{k=1}^n C_k$$

$$= (n-1) (\prod_{k=1}^n a_k) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \text{ on factorise } C_1$$

$$= (n-1) (\prod_{k=1}^n a_k) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \quad C_k \leftarrow C_k - C_1$$

$$= (n-1) (\prod_{k=1}^n a_k) (-1)^{n-1}.$$

On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}}(a_1 e_1 + b_1 U, a_2 e_2 + b_2 U, \dots, a_n e_n + b_n U)$$

$$= \det_{\mathcal{B}}(a_1 e_1, \dots, a_n e_n) + \sum_{k=1}^n \det(a_1 e_1, a_2 e_2, \dots, b_k U, \dots, a_n e_n) + 0$$

par multilinéarité et avec $\det(\dots, U, \dots, U, \dots) = 0$

$$= \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^n b_k \prod_{i \neq k} a_i = \prod_{i=1}^n a_i (1 + \sum_{k=1}^n b_k / a_k).$$

Exo 5 :
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & 2\cos^2(a) - 1 \\ 1 & \cos(b) & 2\cos^2(b) - 1 \\ 1 & \cos(c) & 2\cos^2(c) - 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \cos(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \cos(c) & \cos^2(c) \end{vmatrix}$$

$$= 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos b)(\cos c - \cos a) \text{ comme Déterminant de Vandermonde.}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $D(x) = \begin{vmatrix} c+x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & c+x & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & c+x \end{vmatrix}$.

On a $D(-a) = (c-a)^n$ car la matrice est triangulaire supérieure et $D(-b) = (c-b)^n$ car la matrice est triangulaire inférieure.

Puis $D(x) = \det(C_1 + xU, \dots, C_n + xU)$ avec $C_1, \dots, C_n$ les colonnes et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. En développant et en remarquant que si le déterminant contient deux fois U alors il est nul, on

obtient : $D(x) = \det(C_1, \dots, C_n) + x \sum_{k=1}^n \det(C_1, \dots, \widehat{U^{k-ieme}}, \dots, C_n) = D(0) + x\lambda$.
Ainsi $D(0) - a\lambda = D(-a) = (c-a)^n$ et $D(0) - b\lambda = D(-b) = (c-b)^n$.
Donc $D(0) = \frac{a(c-b)^n - b(c-a)^n}{a-b}$.

On a $D_n = \begin{vmatrix} c & b & & 0 \\ a & c & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a & c \end{vmatrix}_n = cD_{n-1} - b \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ 0 & c & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a & c \end{vmatrix}_{n-1}$ en dvt L_1
 $= cD_{n-1} - abD_{n-2}$ en dvt C_1 .

Donc $(D_n)_{n \geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2

avec $D_0 = 1, D_1 = c$ et $D_2 = c^2 - ab$.

Le polynôme caractéristique est $X^2 - cX + ab$ puis $\Delta = c^2 - 4ab$ et $q_1 = \frac{c+\sqrt{\Delta}}{2}, q_2 = \frac{c-\sqrt{\Delta}}{2}$.

Ainsi $D_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$ donne $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = c$. Donc $D_n = \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1 - q_2}$.

Exo 6 : $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \tan(a/2) \\ 1 & \cos(b) & \tan(b/2) \\ 1 & \cos(c) & \tan(c/2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \tan(a/2) \\ 0 & \cos(b) - \cos(a) & \tan(b/2) - \tan(a/2) \\ 0 & \cos(c) - \cos(a) & \tan(c/2) - \tan(a/2) \end{vmatrix}$

Notons $t_a = \tan(a/2), t_b = \tan(b/2)$ et $t_c = \tan(c/2)$.

On a $\cos \theta = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$ (Bioche universel)

Donc $\cos b - \cos a = \frac{1-t_b^2}{1+t_b^2} - \frac{1-t_a^2}{1+t_a^2} = \frac{2(t_a^2 - t_b^2)}{(1+t_a^2)(1+t_b^2)}$.

Puis $D_1 = \begin{vmatrix} \frac{2(t_a - t_b)(t_a + t_b)}{(1+t_a^2)(1+t_b^2)} & t_b - t_a \\ \frac{2(t_a - t_c)(t_a + t_c)}{(1+t_a^2)(1+t_c^2)} & t_c - t_a \end{vmatrix} = \frac{2(t_a - t_b)(t_a - t_c)}{1+t_a^2} \begin{vmatrix} \frac{t_a + t_b}{1+t_b^2} & -1 \\ \frac{t_a + t_c}{1+t_c^2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{2(t_a - t_b)(t_a - t_c)(t_b - t_c)(1 - t_a t_b - t_a t_c - t_b t_c)}{(1+t_a^2)(1+t_b^2)(1+t_c^2)}$.

D'après la règle de Sarrus :

$\begin{vmatrix} 1 & \cos(c) & \cos(b) \\ \cos(c) & 1 & \cos(a) \\ \cos(b) & \cos(a) & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos a - \cos b - \cos c$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & 2a & 2b \\ a^3 & b^3 & 3a^2 & 3b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 1 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & 2a & 2b-2a \\ a^3 & b^3-a^3 & 3a^2 & 3b^2-3a^2 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \text{ et } C_4 \leftarrow C_4 - C_3.$

$= (b-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & 2a & 2 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & 3a^2 & 3(b+a) \end{vmatrix}$ en factorisant C_2 et C_4 .

$$\begin{aligned}
&= (b-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a^2 & b-a & 2a & 2 \\ a^3 & b^2+ab-2a^2 & 3a^2 & 3(b+a) \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\
&= (b-a)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b-a & 2a & 2 \\ b^2+ab-2a^2 & 3a^2 & 3(b+a) \end{vmatrix} \quad \text{en développant } L_1 \\
&= (b-a)^2 \begin{vmatrix} b-a & 2 \\ (b-a)(b+2a) & 3(b+a) \end{vmatrix} \quad \text{en développant } C_2 \\
&= (b-a)^3 [3(b+a) - 2(b+2a)] = (b-a)^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & x & x & b \\ 1 & a & b & x \\ 1 & b & a & x \\ 1 & x & x & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-x & b-x & x-b \\ 1 & b-x & a-x & x-b \\ 1 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \quad \text{par transvections sur les colonnes} \\
&= \begin{vmatrix} a-x & b-x & x-b \\ b-x & a-x & x-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \quad \text{en développant } L_1 \\
&= (a-b) \begin{vmatrix} a-x & b-x \\ b-x & a-x \end{vmatrix} \quad \text{en développant } L_3 \\
&= (a-b)[(a-x)^2 - (b-x)^2] = (a-b)^2(a+b-2x).
\end{aligned}$$