# TD 17 - Corrigé

**Exo 1 :** **a)** L'application est bien linéaire et associée à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**b)** On note $\mathcal{B} = (f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$.

On calcul $\mathrm{rg}(f_1, f_2, u(e_1), u(e_2)) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 = \mathrm{Card}\mathcal{B} = \dim \mathbb{R}^4$.

Donc la famille est une base de $\mathbb{R}^4$.

**c)** On a $u(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, u(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, u(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -u(e_1) - u(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Donc la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**Exo 2 :** On a $P = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix}$ pour $x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$.

Et $D = \{\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\,(u_3)$.

Puis $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ est engendré par les relations :

$e_2 = u_1 - u_3, e_3 = e_2 - u_2 = u_1 - u_2 - u_3$ et $e_1 = u_1 - e_3 = u_2 + u_3$.

Puis $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2) \oplus \mathrm{Vect}\,(u_3) = P \oplus D$.

La symétrie $s$ par rapport à $P$ le long de $D$ est donnée par $s(u_1) = u_1, s(u_2) = u_2$ et $s(u_3) = -u_3$.

Donc $s(e_1) = u_2 - u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, s(e_2) = u_1 + u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $s(e_3) = u_1 - u_2 + u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de la symétrie est $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**Exo 3 :** **a)** On a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**b)** On résout le système associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{Ker}u = \left\{\begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\text{ pour } y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{Im}u = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(w_1, w_2, w_3) = \mathrm{Vect}\,(w_1, w3)$ car $0 = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1 + w_2$ fournit une relation de liaison.

**c)** Les ensembles $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de dimensions complémentaires $1 + 2 = \dim\mathbb{R}^3$.

Puis pour $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, on a $x = aw_1 + bw_2 = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ 2b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Puis $0 = u(x) = aw_1 - 2aw_2 + 2bw_3 = 3aw_1 + 2bw_3$ donc $a = b = 0$ car la famille $(w_1, w_3)$ est libre.

Donc $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$.

**d)** On sait déjà que $f = id - u$ est une application linéaire en tant que combinaison linéaire.

Puis $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}f$ ssi $f(x) = 0$ ssi $u(x) = x$ ssi $aw_1 + bw_2 + cw_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$

ssi $\begin{pmatrix} a-b \\ -2a+2b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} a-b & = a \\ -2a+2b & = b \\ 2c & = c \end{cases}$ ssi $a = b = c = 0$ ssi $x = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Donc $\mathrm{Ker} u = \{0\}$ et $f$ est un endomorphisme injectif donc un automorphisme par dimension.

**Exo 4 :** **a)** On a $\deg P_k = k$ donc la famille $\mathcal{B}$ est libre car échelonnée en degré.
De plus $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = n+1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X]$.
Donc par dimension $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**b)** On a $P_k(X) = (X-a)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i (-a)^{k-i}$.

Donc $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \dots & (-a)^n \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & \dots & n(-a)^{n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots & \\ 0 & \dots & & \dots & 1 & \end{pmatrix}$

Réciproquement $X^k = [(X-a)+a]^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (X-a)^i a^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} P_i(X)$.

Donc $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots & \\ 0 & \dots & & \dots & 1 & \end{pmatrix}$ même matrice sans les signes.

**c)** L'inverse est donc $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 12 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (avec $a = 2$)

**Exo 5 :** **a)** On a $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

**b)** On a $f(3X+4) = 4f(1) + 3f(X) = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$
$= 4(1+3X^2) + 3(2 - X + 4X^2) = 10 - 3X + 24X^2$.

**Exo 6 :** La matrice de $f$ dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Le noyau se détermine avec la résolution du système homogène :
$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \text{ pour } y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Puis $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} A = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) == \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,(f(e_1), f(e_3)) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
car $0 = f\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3f(e_1) + f(e_2) + 2f(e_3)$ et donc $f(e_2) = 3f(e_1) - 2f(e_3)$ sont coplanaires.

**Exo 7 :** **a)** Pour $P \in \mathbb{R}_[X]$, on a $\deg(u(P)) \leq \max(\deg(P(X)), \deg(P(X+1))) \leq 3$ d'où $u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Puis pour $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $u(P_1 + \lambda P_2) = (P_1(X+1) + \lambda P_2(X+1)) - (P_1(X) + \lambda P_2(X)) = P_1(X+1) - P_1(X) + \lambda(P_2(X+1) - P_2(X)) = u(P_1) + \lambda u(P_2)$. Donc $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X])$.
Puis $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique.
On a $u(1) = 1 - 1 = 0, u(X) = (X+1) - X = 1$.
Puis $u(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$ et $u(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$.

Donc la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**b)** On a $\mathrm{Im} u = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(0, 1, 2X+1, 3X^2+3X+1) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3.
Le noyau est de dimension 1 par le thm du rang et contient 1 car $u(1) = 0$. Donc $\mathrm{Ker} u = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} 1 = \mathbb{R}_0[X]$ les polynômes constants.

**c)** On sait que $u^k$ est représentée par $A^k$.
Or $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Puis pour tout $k \geq 4, A^k = 0$ donc $u^k = 0$ et $\mathrm{Ker} u^k = \mathbb{R}_3[X]$.
Puis $\mathrm{Ker} u^2 = \mathrm{Vect}\,(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$ et $\mathrm{Ker} u^3 = \mathrm{Vect}\,(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.