TD 14 - Corrige

14.1 Sous-espace vectoriel

Indications :
Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E, on dispose de plusieurs méthodes :

1. On montre qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.
2. On montre que c'est un espace engendré $F = \text{Vect}\,(e_1, ..., e_p)$.
3. On montre que c'est le noyau ou l'image d'une application linéaire (c.f. Chapitre 16)

Exo 1 : Méthode 1 : On montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Non vide La suite nulle vérifie $0 = 12.0 - 36.0$ donc F est non vide.
Stable par Comb.Lin. Pour $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
La suite $w_n = u_n + \lambda v_n$ vérifie :
$w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2}$
$= 12u_{n+1} - 36u_n + \lambda(12v_{n+1} - 36v_n)$
$= 12(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) - 36(u_n + \lambda v_n)$
$= 12w_{n+1} - 36w_n$.
Donc $(w_n)_{n\geq 0} \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.
Méthode 2 : On montre que F est un espace engendré.
Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in F$. C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Le polynôme caractéristique est $X^2 - 12X + 36 = (X - 6)^2$.
Donc $u_n = (\lambda_1 n + \lambda_2)6^n = \lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n$ en posant $a_n = n6^n$ et $b_n = 6^n$.
Ainsi $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\,[(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}]$.

Exo 2 : Méthode 1 : On montre que F est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Non vide La fonction nulle vérifie $0'' + 4.0' + 5.0 = 0$ donc F est non vide.
Stable par Comb.Lin. Pour $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
La fonction $y = y_1 + \lambda y_2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie :
$y'' = y_1'' + \lambda y_2''$
$= -4y_1' - 5y_1 + \lambda(-4y_2' - 5y_2)$
$= -4(y_1' + \lambda y_2') - 5(y_1 + \lambda y_2)$
$= -4y' - 5y$
Donc $y \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.
Méthode 2 : On montre que F est un espace engendré.
Soit $y \in F$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Le polynôme caractéristique est $X^2 + 4X + 5 = (X + 2)^2 + 1^2$.
On pose $y_1(t) = e^{-2t}\cos t$ et $y_2(t) = e^{-2t}\sin t$ les solutions homogènes génératrices.
Donc $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ puis $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\,(y_1, y_2)$.

Exo 3 : Non vide La matrice nulle vérifie $A0 = 0 = 0A$. Donc E est non vide.
Stable par Comb.Lin. Pour $M_1, M_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $M = M_1 + \lambda M_2$.
On a $AM = A(M_1 + \lambda M_2) = AM_1 + \lambda AM_2 = M_1 A + \lambda M_2 A = (M_1 + \lambda M_2)A = MA$.
Donc $M \in E$ et E est stable par combinaison linéaire.
Ainsi E est un $\mathbb{R}$-ev en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exo 4 : **a)** Non car $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^3$ sont croissantes donc monotone mais $f = f_2 - f_1$ n'est pas monotone car sa dérivée $f'(x) = 3x^2 - 1$ change de signe.

b) Oui car on peut vérifier les deux conditions :
Non vide : La fonction nulle s'annule en 0.
Stable par Comb.Lin. : Pour deux fonctions f_1 et f_2 qui s'annule en 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $(f_1 + \lambda f_2)(0) = f_1(0) + \lambda f_2(0) = 0$.
Ainsi la combinaison linéaire s'annule bien en 0.

c) Non car $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto (x+1)^2$ s'annulent (en 0 et en 1 respectivement) pourtant $f_1 + f_2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

d) Oui car on peut vérifier les deux conditions :
Non vide : La fonction nulle est impaire.
Stable par Comb.Lin. : Soit f_1 et f_2 impaires et $\lambda \in \mathbb{R}$, on étudie $g = f_1 + \lambda f_2$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $g(-t) = f_1(-t) + \lambda f_2(-t) = -f_1(t) - \lambda f_2(t) = -g(t)$.
Ainsi la combinaison linéaire g est une fonction impaire.

Exo 5 : Non vide La partie Δ est non-vide car la fonction nulle s'écrit $0 = f - f$ pour $f \in \mathcal{C}$.
Stable par Comb.Lin. Pour $h_1, h_2 \in \Delta$, ils existent $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{C}$ telles que $h_1 = f_1 - g_1$ et $h_2 = f_2 - g_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.
1er cas : $\lambda \geq 0$: On a $h_1 + \lambda h_2 = (f_1 + \lambda f_2) - (g_1 + \lambda g_2) \in \Delta$
car $f_1 + \lambda f_2$ et $g_1 + \lambda g_2$ sont des fonctions croissantes.
2eme cas : $\lambda \leq 0$: On a $h_1 + \lambda h_2 = (f_1 - \lambda g_2) - (g_1 - \lambda f_2) \in \Delta$
car $f_1 + (-\lambda) g_2$ et $g_1 + (-\lambda) f_2$ sont des fonctions croissantes.
Dans tous les cas, $h_1 + \lambda h_2 \in \Delta$.
Donc Δ est un sous-espace vectoriel de E.

Exo 6 : On raisonne par double implication.
($\Leftarrow$) On suppose par l'absurde que $F \cup G$ est un espace vectoriel, que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Donc ils existent $u_F \in F \setminus G$ et $u_G \in G \setminus F$.
On a alors $u_F, u_G \in (F \cup G)$ donc $s = u_F + u_G \in (F \cup G)$ car $(F \cup G)$ est stable par Comb.Lin.
1er cas : $s \in F$ alors $u_G = s - u_F \in F$ car F est stable par Comb.Lin. Absurde car $u_G \notin F$.
2eme cas : $s \in G$ de même $u_F = s - u_G \in G$ car G stable par Comb.Lin. Absurde car $u_F \notin G$.
($\Rightarrow$) On suppose que $F \subset G$ ou que $G \subset F$.
1er cas : $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est espace vectoriel par hypothèse.
2eme cas : $G \subset F$ alors de même $F \cup G = F$ est espace vectoriel.

Exo 7 : On doit montrer que $F = E \times E$ est un $\mathbb{C}$-ev par définition.
On note $0_F = (0,0)$ l'élément neutre et les règles sur l'addition sur les règles usuelles.
Pour le produit externe, on a :
éléments neutres $0_{\mathbb{C}} \cdot (x,y) = (0,0) = 0_F$
et $1_{\mathbb{C}} \cdot (x,y) = (1.x - 0.y, 1.y + 0.x) = (x,y)$.
associatif $(a+ib) \cdot [(c+id) \cdot (x,y)]$
$= (a+ib) \cdot (c.x - d.y, c.y + d.x)$
$= (a.(c.x - d.y) - b.(c.y + d.x), a.(c.y + d.x) + b.(c.x - d.y))$
$= ((ac - bd).x - (ad + bc).y, (ac - bd).y + (ad + bc).x)$
$= ((ac - bd) + i(ad - bc)) \cdot (x,y)$.
On retrouve bien l'associativité car $(a+ib)(c+id) = (ac - bd) + i(ad - bc)$.
double distributif $((a+ib) + (c+id)) \cdot (x,y)$
$= ((a+c).x - (b+d).y, (a+c).y + (b+d).x)$
$= ((a.x - b.y) + (c.x - d.y), (a.y + b.x) + (c.y + d.x))$
$= (a+ib) \cdot (x,y) + (c+id) \cdot (x,y)$.
Et $(a+ib) \cdot (x_1, y_1) + (a+ib) \cdot (x_2, y_2)$
$= (a.x_1 - b.y_1, a.y_1 + b.x_1) + (a.x_2 - b.y_2, a.y_2 + b.x_2)$
$= (a.x_1 - b.y_1 + a.x_2 - b.y_2, a.y_1 + b.x_1 + a.y_2 + b.x_2)$
$= (a.(x_1 + x_2) - b.(y_1 + y_2), a.(y_1 + y_2) + b.(x_1 + x_2))$
$= (a+ib) \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
Donc F est bien est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exo 8 : On sait que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev. Montrons que $\mathbb{R}.\omega \subset \mathbb{C}$ est bien un ss-$\mathbb{R}$-ev de $\mathbb{C}$.
Non vide car $0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}}.\omega \in \mathbb{R}.\omega$.
Stable par Comb.Lin. Pour $u, v \in \mathbb{R}.\omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On peut écrire $u = x.\omega$ et $v = y.\omega$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.
Donc $u + \lambda v = (x + \lambda y).\omega \in \mathbb{R}.\omega$.
Pour que $\mathbb{R}.\omega$ soit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel il faut $i.\omega \in \mathbb{R}.\omega$ uniquement possible ssi $\omega = 0$.
Donc $\mathbb{R}.\omega = \{0\}$ est le seul $\mathbb{C}$-ev sous-espace strict de $\mathbb{C}$.

14.2 Espaces supplémentaires

Indications :
Pour montrer que $E = F_1 \oplus F_2$, on peut montrer par définition que tout vecteur $u \in E$ se décompose de manière unique en somme deux vecteurs $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$.
Dans la pratique, on décompose plutôt le raisonnement en deux étapes en montrant que $\boxed{F_1 \cap F_2 = \{0_E\}}$ et $\boxed{F_1 + F_2 = E}$.
Dans tous les cas, il faut commencer par démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E comme dans les exercices précédents.

Exo 9 : Sous-espaces : D est un espace vectoriel en tant qu'espace engendré.
On a $P = \left\{ \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ est un espace vectoriel en tant qu'espace engendré.
$P \cap D \subset \{0_3\}$: Soit $u \in P \cap D$. On a $u = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$ car $u \in D$. Puis $\lambda - 2\lambda + 2\lambda = 0$ car $u \in P$. Ainsi $\lambda = 0$ puis $u = 0_3$ est le vecteur nul.
$P + D \supset \mathbb{R}^3$: Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
On recherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in P$.
On trouve l'équation $(a - \lambda) - (b - 2\lambda) + (c - 2\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a - b + c$.
Donc $u = (u - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}) + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in P + D$.
Ainsi $P \oplus D = \mathbb{R}^3$ i.e. ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exo 10 : Sous-espaces : L'espace G est un espace vectoriel de référence.
L'espace F est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$.
Non vide Le polynôme nul s'annule en 1 et 2 donc $0 \in F$.
Stable par Comb.Lin. Pour $P_1, P_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(P_1 + \lambda P_2)(1) = P_1(1) + \lambda P_2(1) = 0$ et $(P_1 + \lambda P_2)(2) = P_1(2) + \lambda P_2(2) = 0$. Donc $P_1 + \lambda P_2 \in F$.
$F \cap G \subset \{0\}$: Soit $P(X) \in F \cap G$. On a $P(X) = (X-1)(X-2)Q(X)$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ car $(X-1)$ et $(X-2)$ divise P et sont premiers entre eux. Puis $\deg(P) = 2 + \deg Q \leq 1$ impose $Q(X) = 0$. Donc $P(X) = 0$.
$F + G \supset \mathbb{R}[X]$: Pour $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, on peut faire la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$.
On obtient $P(X) = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < 2$.
Ainsi $P(X) \in F + G$ car $(X^2 - 3X + 2)Q(X) \in F$ et $R(X) \in G$.
Donc $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$ i.e. ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exo 11 : Sous-espaces : On montre que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Non vide La fonction nulle est bien dans F.
Stable par Comb.Lin. Pour $f_1, f_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $f = f_1 + \lambda f_2$.
On a : $f(0) = f_1(0) + \lambda f_2(0) = 0$ et $f'(0) = f_1'(0) + \lambda f_2'(0) = 0$. Donc $f \in F$.
Puis $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ est un espace engendré.
$F \cap G \subset \{0\}$: Soit $f \in F \cap G$.
On sait qu'ils existent $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = at + b$ car $f \in G$.
Puis $0 = f(0) = b$ et $0 = f'(0) = a$ car $f \in F$. Donc f est bien la fonction nulle.

$\underline{F+G\supset\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$: Soit $h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On pose $a=h'(0)$ et $b=h(0)$ puis $f(t)=h(t)-at-b$ et $g(t)=at+b$.
On a bien $g\in G$ puis $f(0)=b-b=0=a-a=f'(0)$ d'où $f\in F$. Ainsi $h=f+g\in F+G$.
Conclusion : On a ainsi démontrer que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})=F\oplus G$.

Exo 12 : Sous-espaces : $D=\text{Vect}_{\mathbb{R}}(u)$ est bien un espace vectoriel en tant qu'espace engendré.
Non vide Le vecteur nul est bien dans H par la condition $0+...+0=0$.
Stable par Comb.Lin. Soit $x=(x_1,...,x_n)$ et $y=(y_1,..,y_n)\in H$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on note : $z=x+\lambda y=(x_1+\lambda y_1,...,x_n+\lambda y_n)$
On a $\sum_{i=1}^n(x_i+\lambda y_i)=\sum_{i=1}^n x_i+\lambda\sum_{i=1}^n y_i=0$ i.e. $z\in H$,
car $x\in H$ donc $\sum_{i=1}^n x_i=0$ et de même $y\in H$ donc $\sum_{i=1}^n y_i=0$.
$\underline{H\cap D\subset\{0_{\mathbb{R}^n}\}}$: Soit $x\in H\cap D$. Il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $x=\lambda u=(\lambda,...,\lambda)$ car $x\in D$. Puis $x\in H$ donc $\lambda+...+\lambda=0$ d'où $\lambda=0$ puis $x=0_{\mathbb{R}}u=0_{\mathbb{R}^n}$.
$\underline{\mathbb{R}^n\subset H+D}$: Soit $x\in\mathbb{R}^n$. On recherche $h=(h_1,...,h_n)\in H$ et $d=(\lambda,...,\lambda)\in D$ tel que $x=h+d$. Par analyse-synthèse, il faut $x_i=h_i+\lambda$ et $\sum_{i=1}^n h_i=0$. Donc $\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n(h_i+\lambda)=0+n\lambda$.
On pose $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ et $h=(h_1-\lambda,...,h_n-\lambda)$. On a bien $x=h+d\in H+D$.
Conclusion : $\mathbb{R}^n=H\oplus D$.

Exo 13 : 1) On démontre que $\text{Vect}\,(A\cup B)=\text{Vect}\,(A)+\text{Vect}\,(B)$ en passant aux éléments.
Soit $u\in E$. On a :

$$\begin{aligned}
u\in&\text{Vect}\,(A)+\text{Vect}\,(B)\\
&\Leftrightarrow\exists u_A\in\text{Vect}\,(A),u_B\in\text{Vect}\,(B),u=u_A+u_B\\
&\Leftrightarrow\exists(\lambda_a)_{a\in A}\in\mathbb{R}^A,(\mu_b)_{b\in B}\in\mathbb{R}^B,u=\sum_{a\in A}\lambda_a a+\sum_{b\in B}\mu_b b\\
&\Leftrightarrow\exists(\alpha_v)_{v\in A\cup B}\in\mathbb{R}^{A\cup B},u=\sum_{v\in A\cup B}\alpha_v v\quad\text{en posant }\alpha_v=\begin{cases}\lambda_v\text{ si }v\in A\\ \mu_v\text{ si }v\in B\end{cases}\\
&\Leftrightarrow u\in\text{Vect}\,(A\cup B).
\end{aligned}$$

2) On a $\text{Vect}\,(A\cap B)\subset\text{Vect}\,(A)\cap\text{Vect}\,(B)$. En passant aux éléments, on considère $u\in\text{Vect}\,(A\cap B)$ donc $u=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i$ pour $x_i\in A\cap B$. Mais en particulier $x_i\in A$ donc $u\in\text{Vect}\,(A)$ et de même $x_i\in B$ donc $u\in\text{Vect}\,(B)$.
Ainsi $u\in\text{Vect}\,(A)\cap\text{Vect}\,(B)$.
L'inclusion réciproque est fausse. Par exemple si $A=\{u\}$ et $B=\{-u\}$ alors $A\cap B=\emptyset$ donc $\text{Vect}\,(A\cap B)=\{0_E\}$ et $\text{Vect}\,(A)\cap\text{Vect}\,(B)=\text{Vect}\,(u)$.
Remarque : $\boxed{\text{Vect}\,(\emptyset)=\{0_E\}}$ car la somme vide $\sum_{a\in\emptyset}a=0_E$ est l'élément neutre.

Exo 14 : L'hypothèse de l'énoncé s'écrit $G=(F\cap G)\oplus H$.
$\underline{F\cap H\subset\{0_E\}}$: Soit $u\in F\cap H$ alors $u\in H\subset G$ donc $u\in F\cap G$.
Ainsi $u\in(F\cap G)\cap H=\{0_E\}$ car $F\cap G$ et H sont en somme directe.
$\underline{F+G\subset F+H}$: Soit $u=u_F+u_G\in F+G$. On a $u_G\in G=(F\cap G)\oplus H$.
Donc $u_G=u_0+u_H$ avec $u_0\in F\cap H$ et $u_H\in H$.
Puis $u=u_F+u_0+u_H\in F+H$ car $(u_F+u_0)\in F$ et $u_H\in H$.
Ainsi $F+G=F\oplus H$.

14.3 Famille de vecteurs

Exo 15 : On recherche l'existence de $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tel que $u=\lambda_1x+\lambda_2y$.
On obtient le système d'équation $\begin{cases}\lambda_1&=1\\-\lambda_1+\lambda_2&=1\\\lambda_1+a\lambda_2&=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1&=1\\\lambda_2&=2\\a\lambda_2&=1\end{cases}$. Ce système est compatible ssi $a=\frac{1}{2}$ et dans ce cas l'unique solution est $u=x+2y$.

Les vecteurs sont alors coplanaires mais deux à deux non colinéaires. Les espaces valent tous $P = \text{Vect}(x, y, u)$.
On a $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x, y, x + 2y) = P$.
Puis $\text{Vect}(x, u) = \text{Vect}\left(x, u, \frac{1}{2}(u - x)\right) = P$.
Et $\text{Vect}(y, u) = \text{Vect}(y, u, u - 2y) = P$.

Exo 16 : a) Les vecteurs sont non colinéaires donc ils forment une famille libre.

b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$.

On a $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{cases}$.

C'est un système homogène, échelonné et de rang 3. Donc il admet une unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Par définition la famille est libre.

c) On observe $x_1 + x_3 = x_2$ donc la famille est liée par la relation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

d) On observe que $x_1 = -x_3$ ces deux vecteurs sont colinéaires. Donc la famille est liée par la relation $x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$.

Exo 17 : Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i f_i = 0$ la fct nulle.
Donc pour tout $t \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos t + \lambda_2 t \cos t + \lambda_3 \sin t + \lambda_4 t \sin t = 0$.
Donc on peut en déduire un système de 4 équations pour des valeurs particulières t :

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \quad (t = 0) \\ \lambda_1 + 2\pi\lambda_2 & = 0 \quad (t = 2\pi) \\ \lambda_3 + \frac{\pi}{2}\lambda_4 & = 0 \quad (t = \pi/2) \\ -\lambda_3 + \frac{\pi}{2}\lambda_4 & = 0 \quad (t = -\pi/2) \end{cases}$$

On trouve donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ et donc la famille est libre.

Exo 18 : On démontre par l'absurde que la famille est libre. Sinon ils existent des coefficients $\lambda_0, ..., \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$. Puis on note i_0 le plus grand des indices tels que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On en déduit $\lambda_{i_0} f_{i_0} = -\sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i f_i$.
Or pour $t \in \mathbb{R}$, on en déduit $\lambda_{i_0} e^{i_0 t} = -\sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i e^{it} =_{t\to+\infty} o(e^{i_0 t})$ car $i < i_0$ donc $e^{it} =_{t\to+\infty} o(e^{i_0 t})$. On obtient $\lambda_{i_0} e^{i_0 t} =_{t\to+\infty} o(e^{i_0 t})$ ce qui est absurde. Donc la famille n'est pas liée, elle est donc libre.

<u>Remarque</u> : Ceci démontre l'existence d'autant de directions que possible dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un espace de dimension infinie.

Exo 19 : <u>Attention</u> : Il est FAUX de penser que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On ne peut donc pas utiliser le caractère échelonné des polynômes.

On peut par contre adapter la démonstration de l'exercice précédent en utilisant la comparaison : $\boxed{x^a =_{x\to 0} o(x^b) \Leftrightarrow a > b}$.

Par l'absurde, on considère une relation de liaison $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$ avec $\lambda_0, ..., \lambda_n$ non tous nuls. On note p le plus petit indice tel que $\lambda_p \neq 0$ (i.e. la valuation) alors pour $x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(x) \sim_{x\to 0} \lambda_p x^p$. On obtient $0 \sim_{x\to 0} \lambda_p x^p$ ce qui est absurde.