TD 15-Corrigé : Espace vectoriel de dimension finie

15.1 Famille de vecteurs

Indications :

Pour déterminer la nature d'une famille de vecteurs en dimension finie, il suffit de déterminer son rang. Il se calcul avec l'algorithme du Pivot de Gauss-Jordan sur la matrice des coordonnées. On utilise ensuite les caractérisations suivante :

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est libre ssi } \mathrm{rg}\mathcal{F} = \mathrm{Card}\,\mathcal{F}} \text{ et } \boxed{\mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \text{ ssi } \mathrm{rg}\mathcal{F} = \dim E}$$

Exo 1 : **a)** On calcul le rang de ces familles :

$\mathrm{rg}(v_1, v_2) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$ donc la famille est libre.

$\mathrm{rg}(v_2, v_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 2$ donc la famille est libre.

$\mathrm{rg}(v_1, v_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$ donc la famille est libre.

b) De même $\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

Donc les vecteurs sont coplanaires et la famille est liée.

Exo 2 : On peut calculer le rang dans chacun des cas :

a) On a $\mathrm{rg}\left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2.$

La famille est génératrice de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas libre.

b) $\mathrm{rg}\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3.$

Donc la famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$ ainsi c'est une base.

c) De même $\mathrm{rg}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\right) = 2$ est libre mais pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

d) Enfin $\mathrm{rg}\left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = 2$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$, c'est donc une base.

Exo 3 : On note $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Ils sont non colinéaires et donc engendre un plan que l'on peu noté $P = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2)$. Soit $v \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :
Le vecteur $v \in P$ ssi les vecteurs u_1, u_2 et v sont coplanaires ssi $rg(u_1, u_2, v) = 2$.

Pour $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$, on a $\mathrm{rg}(u_1, u_2, v_1) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = ... = 2$. Donc $v_1 \in P$.

Pour $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, on a $\mathrm{rg}(u_1, u_2, v_2) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ... = 3$. Donc $v_2 \notin P$.

Exo 4 : **a)** On note $F_1 = \mathrm{Vect}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$.

Sa dimension est $\dim_{\mathbb{R}} F_1 = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = 3.$

Donc F_1 est un espace de dimension 3 engendré par 3 vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ et ils forment donc une base de ce sous-espace.

b) On note $F_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Sa dimension est $\dim_{\mathbb{R}} F_2 = \text{rg}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} ... = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2.$

Donc les vecteurs sont liés et $\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi $F_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est bien une base de ce sous-espace de dimension 2.

c) On note $F_3 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

On remarque que $\begin{pmatrix}5\\3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}5\\4\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Ainsi $F_3 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ avec des vecteurs non-colinéaires.

Donc F_3 admet pour base extraite $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Exo 5 : On note $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

On a $p_1(X) = 1 - 3X + 3X^2 - X^3 = \begin{pmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$, $p_2(X) = X - 2X^2 + X^3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$, $p_3(X) = X^2 - X^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ et $p_4(X) = X^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$.

Donc $\text{rg}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = 4 = \text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathbb{R}_3[X])$

Par caractérisation, la famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4.

<u>Indications :</u> Dans les exemples plus abstraits, on peut revenir à la définition :
$(u_1, ..., u_n)$ est libre ssi $\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$
$(u_1, ..., u_n)$ est génératrice de E ssi $\forall v \in E, \exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, v = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$.

Exo 6 : **a)** Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon_i = 0_E$.
Alors $0_E = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^i e_j = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} \lambda_i e_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \lambda_i e_j$.
Donc $\forall j \in [\![1, n]\!], \sum_{i=j}^n \lambda_i = 0$ car $(e_1, ..., e_n)$ est une base de l'espace.
Donc pour tout $j \in [\![1, n]\!], \lambda_j = \sum_{i=j}^n \lambda_i - \sum_{i=j+1}^n \lambda_i = 0 - 0 = 0$.
Ainsi $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ donc la famille $(\epsilon_1, ...\epsilon_n)$ est libre.
De plus la famille est composée de n vecteurs identique à la dimension de l'espace.
Donc par caractérisation B' est une base de E.

b) On a : $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}_B = \sum_{i=1}^n a_i e_i = \sum_{i=1}^n a_i(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})$ en posant $\epsilon_0 = 0_E$.

Donc $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}_B = \sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1}\epsilon_i = \begin{pmatrix}a_1-a_2\\ a_2-a3\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}_{B'}$.

Exo 7 : Pour simplifier, on ajoute la notation $e_{n+1} = e_1$.
On a $u = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k w_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(e_k + e_{k+1})$
$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k e_k + \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k-1}e_k$ par changement d'indices dans la 2nd somme.
$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k e_k - \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k e_k = (-1)e_1 - (-1)^{n+1}e_{n+1}$ par relation de Chasles.
$= [-1 + (-1)^n]e_1$ car $e_{n+1} = e_1$.
Ainsi $u = \begin{cases} -2e_1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$
Si n est pair, on a trouvé $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k w_k = u = 0_E$ une relation de liaison de la famille. Ce n'est pas une base car elle n'est pas libre.
Si n est impair, on note $F = \text{Vect}\,(w_1, ..., w_n)$. On a $e_1 = \frac{-1}{2}u \in F$ par le calcul précédent.
Puis $e_2 = w_1 - e_1 \in F$ car F est stable par opérations.
On démontre ainsi par récurrence immédiate que $e_{k+1} = w_k - e_k \in F$ pour tout $1 \leq k \leq n$.
Donc $E = \text{Vect}\,(e_1, ..., e_n) \subset F$ permet de démontrer que $E = F = \text{Vect}\,(w_1, ..., w_n)$. Ceci montre que la famille est génératrice de E et elle est constituée de n vecteurs, par caractérisation, c'est une base de E.

Exo 8 : **a)** Soient $\lambda_1, .., \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0_E$.
Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = -\lambda_{n+1}u_{n+1}$.
Donc $\lambda_{n+1} = 0$ car sinon $u_{n+1} = \frac{-1}{\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in \text{Vect}\,(u_1, ..., u_n)$ Absurde.
Puis $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$ donne $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ car la famille est libre.
Ainsi $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$ donc $(u_1, ..., u_n, u_{n+1})$ est une famille libre.

b) On écrit $u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$. Soit $v \in E$.
La famille $(u_1, ..., u_n, u_{n+1})$ est génératrice donc ils existent des scalaires tels que :
$v = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \lambda_{n+1}u_{n+1}$
$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \lambda_{n+1}\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i + \lambda_{n+1}\mu_i)u_i \in \text{Vect}\,(u_1, ..., u_n)$.
Ainsi la famille $(u_1, ..., u_n)$ est bien une famille génératrice.

15.2 Sous-espace vectoriel

<u>**Indications :**</u> En dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels peuvent s'écrient $F = \text{Vect}\,\mathcal{F}$.

Exo 9 : **a)** On a $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = 2x$ et $z = -3x\}$
$= \{\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -3x \end{pmatrix}$ pour $x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Donc F est bien un espace vectoriel.

b) On a $0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin G$ donc G n'est pas un espace vectoriel.

c) On a $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de H mais $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin H$.
Donc H n'est pas un espace vectoriel.

d) On a $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in I$ mais $-u \notin I$ donc I n'est pas un espace vectoriel.

e) On a $J = \{u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour $u, v \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$.
Donc J est un espace vectoriel.

Exo 10 : **a)** On a :$A = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } y, z \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Ainsi A est un ss-$\mathbb{R}$-ev de dimension 2 (un plan vectoriel) avec pour base : $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

b) On résout le système $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{cases}$ échelonné homogène de rang 2.
Donc $B = \left\{\begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } z \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Donc B est un ss-$\mathbb{R}$-ev de dimension 1 (une droite vectorielle) avec pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exo 11 : **a)** L'appartenance $A \in \mathcal{E}$ se traduit par $S(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i}$ pour tout $i_0, j_0 \in [\![1,n]\!]$ et $S(A) \in \mathbb{R}$ la valeur de la somme.

<u>Non vide</u> : La matrice nulle appartient à $\mathcal{E}$ avec la somme $S(0) = 0$.

<u>Stable par combinaison linéaire</u> : Soit $A, B \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour une ligne $i_0 \in [\![1,n]\!]$, on a :
$\sum_{j=1}^n [A+\lambda B]_{i_0,j} = \sum_{j=1}^n [A]_{i_0,j} + \lambda \sum_{j=1}^n [B]_{i_0,j} = S(A) + \lambda S(B)$.
Pour une colonne $j_0 \in [\![1,n]\!]$, on a :
$\sum_{i=1}^n [A+\lambda B]_{i,j_0} = \sum_{i=1}^n [A]_{i,j_0} + \lambda \sum_{i=1}^n [B]_{i,j_0} = S(A) + \lambda S(B)$.
Pour la 1er diagonale, on a :
$\sum_{i=1}^n [A+\lambda B]_{i,i} = \sum_{i=1}^n [A]_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^n [B]_{i,i} = S(A) + \lambda S(B)$.
Pour la 2eme diagonale, on a :
$\sum_{i=1}^n [A+\lambda B]_{i,n+1-i} = \sum_{i=1}^n [A]_{i,n+1-i} + \lambda \sum_{i=1}^n [B]_{i,n+1-i} = S(A) + \lambda S(B)$.
Donc $A + \lambda B \in \mathcal{E}$ avec pour somme $S(A+\lambda B) = S(A) + \lambda S(B)$.

b) On a $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{E} \text{ tel que } S(A) = 0\} = \mathrm{Ker} S$ donc c'est un sous-espace de $\mathcal{E}$. On note $J = (1)$. On a $J \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} J$ est un ss-ev de $\mathcal{E}$.
Puis on a $S(J) = n$. Donc pour $A \in \mathcal{N} \cap \mathcal{C}$, on a $A = \lambda J$ puis $0 = S(A) = \lambda n$ et ainsi $\lambda = 0$. Donc $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont en somme directe.
Puis pour $A \in \mathcal{E}$, on pose $\lambda = \frac{S(A)}{n}$. On a $A = (A - \lambda J) + \lambda J \in \mathcal{N} + \mathcal{C}$ car $S(A - \lambda J) = S(A) - \lambda n = 0$.
Donc $\mathcal{E} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{C}$.

c) Pour $N \in \mathcal{N}$, on remarque que $N^T \in \mathcal{N}$. On pose $S = \frac{1}{2}(N + N^T)$ et $A = \frac{1}{2}(N - N^T)$. On a S symétrique et A antisymétrique étant l'unique décomposition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puis $S \in \mathcal{N}$ et $A \in \mathcal{N}$ car $\mathcal{N}$ est stable par combinaison linéaire. Donc $M = S + A$ est l'unique décomposition sur $\mathcal{N} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

d) On a $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} J$,

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \text{ tel que } 0 = a+b = -a+c = -b-c \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ b & c & -b-c \\ -a-b & -b-c & a+2b+c \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} 2a+2b+2c & = 0 \\ -2a-2b+c & = 0 \end{cases} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puis $\mathcal{E} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix} \text{ pour } a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

<u>**Indications :**</u> La formule de Grassmann permet de calculer efficacement certaines dimensions :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$$

Exo 12 : On commence par considérer une base de $\mathcal{B}_0 = (e_1, ..., e_p)$ de $F_1 \cap F_2$ avec $p = \dim_{\mathbb{R}}(F_1 \cap F_2)$.
Puis on la complète en une base $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{F}_1 = (e_1, ..., e_p, u_1, ..., u_{n-p})$ de F_1 avec $p \leq n = \dim_{\mathbb{R}} F_1 = \dim_{\mathbb{R}} F_2$.
On la complète également en une base $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{F}_2 = (e_1, ..., e_p, v_1, ..., v_{n-p})$ de F_2.
On pose $G_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1 + v_1, ..., u_{n-p} + v_{n-p})$.
On a $F_1 + G_0 = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_p, u_1, ..., u_{n-p}, u_1 + v_1, ..., u_{n-p} + v_{n+p})$
$= \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_p, u_1, ..., u_{n-p}, v_1, ..., v_{n+p})$
$= \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_p, u_1, ..., u_{n-p}) + \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_p, v_1, ..., v_{n-p}) = F_1 + F_2$.
Puis $\dim_{\mathbb{R}}(F_1 + G_0) = \dim_{\mathbb{R}}(F_1 + F_2) = \dim_{\mathbb{R}}(F_1) + \dim_{\mathbb{R}}(F_2) - \dim_{\mathbb{R}}(F_1 \cap F_2) = 2n - p$ d'après la formule de Grassmann.
Et $\dim_{\mathbb{R}}(F_1 \cap G_0) = \dim_{\mathbb{R}} F_1 + \dim_{\mathbb{R}} G_0 - \dim_{\mathbb{R}}(F + G_0)$

$= n + \mathrm{rg}(u_1 + v_1, ..., u_{n-p} + v_{n-p}) - (2n - p) \leq n + (n - p) - (2n - p) = 0$.
Donc $F_1 \cap G_0 = \{0\}$ sont en somme directe avec $F_1 \oplus G = F_1 + F_2$.

On obtient par symétrie du problème et de la définition de G que $F_2 \oplus G = F_1 + F_2$.
Enfin on peut considérer un supplémentaire H de $F_1 + F_2$ dans E càd $H \oplus (F_1 + F_2) = E$.
Et ainsi on obtient $E = (F_1 + F_2) \oplus H = F_i \oplus G_0 \oplus H$ pour $i = 1$ ou 2. Et donc $G = G_0 \oplus H$ est un supplémentaire commun de F_1 et F_2 dans E.

Exo 13 : **a)** On a $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z-t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ pour } y, z, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
On a $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -y+z+t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ pour } y, z, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Donc ce sont des espaces vectoriels en tant qu'espace engendré.

b) Puis $\dim_{\mathbb{R}}(F_1) = \mathrm{rg} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 3$.
Et $\dim_{\mathbb{R}}(F_2) = \mathrm{rg} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 3$.
Puis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_2 \setminus F_1$ donc $F_1 \subsetneq F_1 + F_2 \subset \mathbb{R}^4$
donc $3 = \dim_{\mathbb{R}} F_1 < \dim_{\mathbb{R}}(F_1 + F_2) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$. Ainsi $\dim_{\mathbb{R}}(F_1 + F_2) = 4$ et d'après la formule de Grassmann $\dim_{\mathbb{R}}(F_1 \cap F_2) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Exo 14 : On a $\dim_R F = \dim_{\mathbb{R}}(F + H) + \dim_{\mathbb{R}}(F \cap H) - \dim_R H = \dim_{\mathbb{R}}(G + H) + \dim_{\mathbb{R}}(G \cap H) - \dim_R H = \dim_{\mathbb{R}} G$. De plus, on a $F \subset G$ donc ce sont les mêmes espaces $F = G$.

Le résultat est Faux si on une des trois hypothèses n'est pas vérifiées.
Si on n'a pas (iii) ceci est trivial.
Si on a (iii) c'est à dire $F \subsetneq G$.
Alors pour $H = F$, on a $F \cap H = F = G \cap H$ mais pas $F + H = F \neq G = G + H$.
Et pour $H = G$, on a $F + H = G = G + H$ mais $F \cap H = F \neq G = G \cap H$.

Exo 15 : **a)** On le démontre par double inclusion en passant aux éléments.
($\subset$) Soit $u \in (F + G) \cap H$ alors $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.
Puis $u_G = u - u_F \in H$ car $u, u_F \in H$. Donc $u_G \in G \cap H$ et $u = u_F + u_G \in F + (G \cap H)$.
($\supset$) Soit $u = u_F + u_0 \in F + (G \cap H)$. On a $u \in H$ car $u_F, u_0 \in H$.
Puis $u = u_F + u_0 \in F + G$ donc $u \in (F + G) \cap H$.

b) <u>1er cas $F \subset H$</u> : Alors $F \cap H = F$ et $F + H = H$. Donc $(F + G) \cap (F + H) = (F + G) \cap H = F + (G \cap H) = (F \cap H) + (G \cap H)$.

<u>2eme cas $G \subset H$</u> : Alors $(F + G) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$ par symétrie des rôles de F et G.
Puis $G \cap H = G$ et $F + G \subset F + H$ donc $(F + G) \cap (F + H) = F + G = F + (G \cap H)$.

c) On a toujours $(F + G) \cap H \supset F \cap H + G \cap H$. Car pour $u = u_F + u_G \in (F \cap H) + (G \cap H)$, on a $u \in F + G$ et $u \in H$ car $u_F, u_G \in H$.

Et on a $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$ car pour $u = u_F + u_0 \in F + (G \cap H)$. On a $u = u_F + u_0 \in F + G$ et $u = u_F + u_0 \in F + H$. Donc $u \in (F + G) \cap (F + H)$.

Dans $\mathbb{R}^2$, si l'on prend trois droite D_1, D_2 et D_3 deux a deux non confondues. On a $D_i \cap D_j = \{0\}$ et $D_i + D_j = \mathbb{R}^2$ pour $i \neq j$.
Puis $(D_1 + D_2) \cap D_3 = \mathbb{R}^2 \cap D_3 = D_3 \neq \{0\} = \{0\} + \{0\} = D_1 \cap D_3 + D_2 \cap D_3$.
Et $D_1 + (D_2 \cap D_3) = D_1 + \{0\} = D_1 \neq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 + \mathbb{R}^2 = (D_1 + D_2) \cap (D_1 + D_3)$.

CCL : Il n'y a donc pas de règles de distributivité simples entre les opérations $\cap$ et $+$

sur les espaces vectoriels.