TD 16-Corrigé : Application linéaire

16.1 Contexte explicite

Indications : Pour démontrer que $f : E \to F$ est linéaire, on commence par vérifier que E et F sont des espaces vectoriels. Puis on montre que $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'image est engendré par l'image d'une base $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, f(\mathcal{B}_E)$.

Le noyau est obtenue en résolvant le système $f(u) = 0_F$.

On peut en général utiliser le théorème du rang pour obtenir un lien entre noyau et image.

$$\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f}$$

Exo 1 : **a)** Soient $u_1 = \binom{x_1}{y_1}, u_2 = \binom{x_2}{y_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $f_1(u_1+\lambda u_2) = f_1\begin{pmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y_2 \end{pmatrix} = 2(x_1+\lambda x_2)-3(y_1+\lambda y_2) = (2x_1-3y_1)+\lambda(2x_2-3y_2)$ $= f_1\binom{x_1}{y_1} + \lambda f_1\binom{x_2}{y_2} = f_1(u_1) + \lambda f_1(u_2)$.

Donc $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est bien une application linéaire.

On a $\mathrm{Im} f_1 = f_1(\mathbb{R}^2) = f_1(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{f_1\binom{1}{0}, f_1\binom{0}{1}\} = \mathbb{R}$.

Puis $\mathrm{Ker} f_1 = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } f_1\binom{x}{y} = 0\right\} = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 2x - 3y = 0\right\} = \left\{\binom{3y/2}{y} \text{ pour } y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\binom{3/2}{1} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\binom{3}{2}$.

b) Soient $u_1 = \binom{x_1}{y_1}, u_2 = \binom{x_2}{y_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $f_2(u_1+\lambda u_2) = f_2\begin{pmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+\lambda x_2)-2(y_1+\lambda y_2) \\ 3(x_1+\lambda x_2)-6(y_1+\lambda y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-2y_1 \\ 3x_1-6y_1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} x_2-2y_2 \\ 3x_2-6y_2 \end{pmatrix}$ $= f_2\binom{x_1}{y_1} + \lambda f_2\binom{x_2}{y_2} = f_2(u_1) + \lambda f_2(u_2)$.

Donc $f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est bien une application linéaire.

On a $\mathrm{Im} f_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{f_2\binom{1}{0}, f_2\binom{0}{1}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\binom{1}{3}, \binom{-2}{-6}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\binom{1}{3}$ car les vecteurs sont colinéaires et donc engendrent une droite vectorielle.

On a $\mathrm{Ker} f_2 = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x - 2y = 3x - 6y = 0\right\}$ $\left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x = 2y\right\} = \left\{\binom{2y}{y} \text{ pour } y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\binom{2}{1}$.

c) Soient $u_1 = \binom{x_1}{y_1}, u_2 = \binom{x_2}{y_2} \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a $f_3(u_1 + \lambda u_2) = f_3\begin{pmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(x_1+\lambda x_2)-(y_1+\lambda y_2) \\ (x_1+\lambda x_2)+i(y_1+\lambda y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_1-y_1 \\ x_1+iy_1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} ix_2-y_2 \\ x_2+iy_2 \end{pmatrix}$ $= f_3\binom{x_1}{y_1} + \lambda f_3\binom{x_2}{y_2} = f_3(u_1) + \lambda f_3(u_2)$.

Donc $f_3 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ est bien une application linéaire.

On a $\mathrm{Im} f_3 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{f_3\binom{1}{0}, f_3\binom{0}{1}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{\binom{i}{1}, \binom{-1}{i}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\binom{i}{1}$ car les vecteurs sont colinéaires $\binom{-1}{i} = i\binom{i}{1}$ et donc engendrent une droite vectorielle.

On a $\mathrm{Ker} f_3 = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } ix - y = x + iy = 0\right\}$ $\left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } y = ix\right\}$ car ce sont les mêmes équations $= \{\binom{x}{ix} \text{ pour } x \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\binom{1}{i}$.

d) Soient $u_1 = \binom{x_1}{y_1}, u_2 = \binom{x_2}{y_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $f_4(u_1+\lambda u_2) = f_4\begin{pmatrix} x_1+\lambda x_2 \\ y_1+\lambda y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x_1+\lambda x_2)+5(y_1+\lambda y_2) \\ (x_1+\lambda x_2)-2(y_1+\lambda y_2) \\ 2(x_1+\lambda x_2)-(y_1+\lambda y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1+5y_1 \\ x_1-2y_1 \\ 2x_1-y_1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3x_2+5y_2 \\ x_2-2y_2 \\ 2x_2-y_2 \end{pmatrix}$ $= f_4\binom{x_1}{y_1} + \lambda f_4\binom{x_2}{y_2} = f_2(u_1) + \lambda f_2(u_2)$.

Donc $f_4 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ est bien une application linéaire.

On a $\mathrm{Im}f_4 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{f_4\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), f_4\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$, un plan vectorielle.

On a $\mathrm{Ker}f_2 = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 3x+5y = x-2y = 2x-y = 0\right\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}$.

e) Soient $u_1 = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $f_5(u_1+\lambda u_2) = f_5\begin{pmatrix}x_1+\lambda x_2\\y_1+\lambda y_2\\z_1+\lambda z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x_1+\lambda x_2)+5(y_1+\lambda y_2)-(z_1+\lambda z_2)\\-(x_1+\lambda x_2)+2(y_1+\lambda y_2)-2(z_1+\lambda z_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+5y_1-z_1\\-x_1+2y_1-2z_1\end{pmatrix}+$ $\lambda\begin{pmatrix}x_2+5y_2-z_2\\-x_2+2y_2-2z_2\end{pmatrix} = f_5\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} + \lambda f_5\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = f_5(u_1)+\lambda f_5(u_2)$.
Donc $f_5 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ est bien une application linéaire.

On a $\mathrm{Im}f_5 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{f_5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f_5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right)\right\} = \mathbb{R}^2$, car il y a deux vecteurs non colinéaires dans un espace de dimension 2 donc la famille est génératrice.

On a $\mathrm{Ker}f_5 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x+5y-z = -x+2y-2z = 0\right\}$
$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = -5y+z \text{ et } 7y = 3z\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-(8/7)z\\(3/7)z\\z\end{pmatrix} \text{ pour } z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix}-8\\3\\7\end{pmatrix}$.

Exo 2 : On détermine la nature de la famille $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}10\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ en calculant son rang.
On a $\mathrm{rg}\mathcal{B} = 4 = \mathrm{Card}\mathcal{B} = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ donc c'est une base de l'espace.
D'après le cours, une application linéaire est fixée de manière unique par l'image d'une base.

On a donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}10\\1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ à déterminer car la famille est génératrice. On doit ainsi résoudre le système associée à la matrice augmentée :
$\left(\begin{array}{cccc|c}10&1&2&0&1\\1&2&0&0&1\\2&1&1&0&1\\0&0&1&2&1\end{array}\right) \sim_L \dots \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&29/39\\0&1&0&0&5/39\\0&0&1&0&-8/13\\0&0&0&1&21/26\end{array}\right)$ donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29/39\\5/39\\-8/13\\21/26\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$
Donc $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 29/39 f\begin{pmatrix}10\\1\\2\\0\end{pmatrix} + 5/39\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} - 8/13\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} + 21/26\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix} = 31/13$.

On a $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}f(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4) = \mathbb{R}$. Donc l'application est surjective.

Soit $u = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^4$ exprimé dans la base $\mathcal{B}$. On a $f(u) = 0$ ssi $a+2b+3c+4d = 0$ ssi $a = -2b-3c-4d$ avec $b,c,d \in \mathbb{R}$ des paramètres.
Donc $\mathrm{Ker}f = \left\{\begin{pmatrix}-2b-3c-4d\\b\\c\\d\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ pour } b,c,d \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix}-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right\}$
$= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}10\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}10\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}10\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-19\\0\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-28\\-3\\-5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-40\\-4\\-8\\2\end{pmatrix}\right\}$
exprimé dans la base canonique.

Exo 3 : **a)** On étudie la famille (v_1,v_2,v_3). On a $v_2+v_3 = 2v_1$. Donc la famille est liée.
Si il existait une telle application linéaire alors $e_2+e_3 = f(v_2+v_3) = f(2v_1) = 2e_1$.
Ainsi la famille (e_1,e_2,e_3) est liée Absurde pour une base.

b) La famille (v_1,v_2) est libre. On peut la compléter en une base (v_1,v_2,u) de $\mathbb{R}^3$ (par exemple $u = e_1$ convient).
Soit $w \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque, il existe une unique application $f_w \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $f_w(v_1) = e_1, f_w(v_2) = e_2$ et $f_w(u) = w$. De plus, on a $f_w(v_3) = f_w(2v_1 -$

$v_2) = 2e_1 - e_2$. Donc f_w vérifie les conditions de l'énoncé et il existe autant de telles applications que de choix de $w \in \mathbb{R}^3$ c'est à dire une infinité.

Exo 4 : **a)** On dispose de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, i)$ de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-ev. Donc f est entièrement déterminée par $f(1)$ et $f(i)$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = xf(1) + yf(i) = \frac{z+\bar{z}}{2}f(1) + \frac{z-\bar{z}}{2i}f(i) = \frac{f(1)-if(i)}{2}z + \frac{f(1)+if(i)}{2}\bar{z}$. Ainsi $a = \frac{f(1)-if(i)}{2}$ et $b = \frac{f(1)+if(i)}{2}$ conviennent.

b) L'application est $\mathbb{C}$-linéaire si on a de plus $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Donc en particulier, il faut $f(i) = if(1)$. Ce fournit des simplifications : $a = \frac{f(1)-if(i)}{2} = f(1)$ et $b = \frac{f(1)+if(i)}{2} = 0$.
Donc $f(z) = f(1)z$ sont bien les seules applications $\mathbb{C}$-linéaires.

Exo 5 : **a)** Soient $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $f\left((u_n + \lambda v_n)_{n\geq 0}\right) = \left((u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) - (u_n + \lambda v_n)\right)_{n\geq 0} = (u_{n+1} - u_n)_{n\geq 0} + \lambda(v_{n+1} - v_n)_{n\geq 0} = f((u_n)_{n\geq 0}) + \lambda f((v_n)_{n\geq 0})$.
Donc f est bien linéaire.

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{Ker} f$ ssi $(u_{n+1} - u_n)_{n\geq 0} = (0)_{n\geq 0}$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0$ ssi $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante.
Donc $\mathrm{Ker} f = \{(c)_{n\geq 0} \text{ pour } c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1)_{n\geq 0}$.

Puis $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Car pour $(v_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut définir pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Alors on a $f((u_n)_{n\geq 0}) = (v_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{Im} f$ car $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_n$.

b) Soit $q \in \mathbb{R}$. Une suite géométrique vérifie $u_{n+1} = qu_n$ donc $f(u_n) = (q-1)u_n$ puis $(f - (q-1)id_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}})(u_n) = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}\left[f - (q-1)f^0\right]$ est bien l'espace vectoriel des suites de raison q.

Exo 6 : **a)** Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(f(P)) = \deg(P + (1-X)P') \leq \max(\deg P, 1 + \deg P') = \deg P \leq n$. Donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et les espaces de f sont bien définies.
Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f(P_1 + \lambda P_2) = (P_1 + \lambda P_2) + (1-X)(P_1 + \lambda P_2)' = P_1 + (1-X)P_1' + \lambda(P_2 + (1-X)P_2') = f(P_1) + \lambda f(P_2)$. Donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $P \in \mathrm{Ker} f$. On a $f(P) = 0$ donc $(X-1)P' - P = 0$ est associée à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $y'(t) - \frac{1}{t-1}y(t) = 0$. Ainsi $y(t) = \lambda \exp \ln|t-1| = \begin{cases} \lambda_1(t-1) & \text{si } t < 1 \\ \lambda_2(t-1) & \text{si } t > 1 \end{cases}$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Donc les solutions polynomiales sont $P(X) = \lambda(X-1)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X-1)$.

On a $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1, X, ..., X^n)$ donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f(1), f(X), ..., f(X^n))$.
Or $f(X-1) = 0$ donc $f(X) = f(1) = 1$. Puis pour $k \in [\![2, n]\!]$, $f(X^k) = X^k + k(1-X)X^{k-1} = (1-k)X^k + kX^{k-1}$ de degré k.
Ainsi la famille $(1, f(X^2), ..., f(X^n)) = (1, -X^2 + 2X, ..., (1-n)X^n + nX^{n-1})$ est libre car échelonnée en degré.
Donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1, -X^2 + 2X, ..., (1-n)X^n + nX^{n-1})$.

16.2 Contexte abstrait

Exo 7 : Pour $x \notin \mathrm{Ker}(f^{n-1})$, on a $f^{n-1}(x) \neq 0_E$ et $\forall i \geq n, f^i(x) = 0_E$. La famille $\mathcal{F} = (x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ de n vecteurs dans un espace de dimension n. Donc $\mathrm{Card}\mathcal{F} = \dim_{\mathbb{R}} E$.
Soient $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_E$.
On démontre par récurrence totale que $\lambda_k = 0$.
Init : On a $0_E = f^{n-1}(0_E) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1}(f^i(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n+i-1}(x) = \lambda_0 f^{n-1}(x)$.

Donc $\lambda_0 = 0$.
Heré : Soit $0 \leq k \leq n-1$ tq $\forall i \leq k, \lambda_i = 0$, alors $0_E = f^{n-k-2}(0_E) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-k-2}(f^i(x))$ $= 0_E + ... + 0_E + \sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^{n+i-k-2}(x) = \lambda_{k+1} f^{n-1}(x) + 0_E + ... + 0_E$ donc $\lambda_{k+1} = 0$.
Ccl : Ainsi $\lambda_0 = ... = \lambda_{n-1} = 0$ et la famille $\mathcal{F}$ est libre.
Par thm de caractérisation, la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

Exo 8 : **a)** ($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g = h \circ f$.
Soit $u \in \text{Ker}f$. Alors $g(u) = h(f(u)) = h(0) = 0$ donc $u \in \text{Ker}g$.
($\Rightarrow$) On suppose que $\text{Ker}f \subset \text{Ker}g$. On considère un supplémentaire S de $\text{Ker}f$ dans E i.e. $E = S \oplus \text{Ker}f$. Alors $f|_S^{\text{Im}f}$ est une application injective $\text{Ker}f|_S^{\text{Im}f} = S \cap \text{Ker}f = 0$ et surjective $\text{Im}f = f(E) = f(S + \text{Ker}f) = f(S) = \text{Im}f|_S^{\text{Ker}f}$. Donc $f|_S^{\text{Im}f}$ est un isomorphisme et on pose $h = g \circ (f|_S^{\text{Im}f})^{-1}$ pour avoir $g = h \circ f$.

b) ($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g \circ h$.
Alors $\text{Im}f = f(E) = g(h(E)) \subset g(E) = \text{Im}g$ car $h(E) \subset E$.
($\Rightarrow$) On suppose que $\text{Im}f \subset \text{Im}g$. Alors de même en considérant un supplémentaire de $\text{Ker}g$ dans E. On obtient $g|_S^{\text{Im}g}$ est un isomorphisme et on peut poser $h(u) = (g|_S^{\text{Im}g})^{-1}(f(u))$ bien défini car $f(u) \in \text{Im}f \subset \text{Im}g$ l'espace de départ de $(g|_S^{\text{Im}g})^{-1}$. Ainsi $f = g \circ h$.

Exo 9 : **a)** On suppose par l'absurde que $p = \lambda q$. Alors $p = p^2 = (\lambda q)^2 = \lambda^2 q^2 = \lambda^2 q$. Ainsi $\lambda q = p = \lambda^2 q$ avec $q \neq 0$. Donc $\lambda^2 = \lambda$ puis $\lambda \in \{0, 1\}$. Ceci est absurde car si $\lambda = 1$ alors $p = q$ et si $\lambda = 0$ alors $p = 0$.

b) ($\Leftarrow$) On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$ alors $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + 0 + 0 + q = p + q$. Donc $p + q$ est un projecteur.
($\Rightarrow$) On suppose que $(p+q)^2 = p + q$ alors $0 = (p+q)^2 - (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 - p - q = p \circ q + q \circ p$ car $p^2 = p$ et $q^2 = q$. Puis $p \circ q = -q \circ p = -q^2 \circ p = -q \circ (q \circ p) = q \circ p \circ q = -p \circ q \circ q = -p \circ q$ car $q \circ q = q$.
Ainsi $p \circ q = -p \circ q$ donc $p \circ q = 0$. Enfin $q \circ p = -p \circ q = 0$.

c) On montre que $\text{Im}(p+q) = \text{Im}p \oplus \text{Im}q$.
En effet, si $u \in \text{Im}p \cap \text{Im}q$ alors $u = p(u) = q(u)$ car l'image d'un projecteur est invariante. Donc $0 = p(q(u)) = p(u) = u$.
Puis pour $u \in \text{Im}(p+q)$ alors $u = (p+q)(u) = p(u) + q(u) \in \text{Im}p + \text{Im}q$.
Réciproquement, pour $u = p(x) + q(y) \in \text{Im}p + \text{Im}q$, on a $(p+q)(u) = (p+q)(p(x)) + (p+q)(q(y)) = p(p(x)) + q(p(x)) + p(q(y)) + q(q(y)) = p(x) + 0 + 0 + p(y) = u$. Donc $u = (p+q)(u) \in \text{Im}(p+q)$.

On démontre que $\text{Ker}(p+q) = \text{Ker}p \cap \text{Ker}q$.
Pour $u \in \text{Ker}p \cap \text{Ker}q$, on a $(p+q)(u) = p(u) + q(u) = 0 + 0 = 0$. Donc $u \in \text{Ker}(p+q)$.
Réciproquement pour $u \in \text{Ker}(p+q)$, on a $p(u) + q(u) = 0$. Donc $0 = p(0) = p(p(u)) + p(q(u)) = p(u) + 0 = p(u)$ donc $u \in \text{Ker}p$. Et $0 = q(u) = q(p(u)) + q(q(u)) = q(u)$ donc $u \in \text{Ker}q$. Ainsi $u \in \text{Ker}p \cap \text{Ker}q$.

Exo 10 : ($\Rightarrow$) On suppose $\text{Ker}f = \text{Im}f$. Alors pour $u \in E, f^2(u) = f(f(u)) = 0$ car $f(u) \in \text{Ker}f$.
Et $\text{rg}_{\mathbb{R}}(f) = \dim_{\mathbb{R}}\text{Im}f = \dim_{\mathbb{R}}\text{Ker}f = \dim_{\mathbb{R}}E - \text{rg}_{\mathbb{R}}f$ d'après le théorème du rang.

($\Leftarrow$) On suppose que $f^2 = 0$ et $n = 2\text{rg}(f)$.
On a $\text{Im}f \subset \text{Ker}f$ car pour $v = f(u) \in \text{Im}f$, on a $f(v) = f^2(u) = 0$ d'où $v \in \text{Ker}f$.
Puis le théorème du rang donne $\text{rg}(f) + \dim_{\text{Ker}f} = n = 2\text{rg}(f)$ donc $\dim\text{Ker}f = \text{rg}f = \dim\text{Im}f$.
Ainsi par dimension les espaces vectoriels $\text{Ker}f = \text{Im}f$.

Exo 11 : **a)** On a $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}f + \text{Im}g$ car pour $v = (f+g)(u) \in \text{Im}(f+g)$ alors $v = f(u) + g(u) \in \text{Im}f + \text{Im}g$. Donc $\text{rg}(f+g) = \dim_{\mathbb{K}}\text{Im}(f+g) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}f + \text{Im}g) = \dim_{\mathbb{K}}\text{Im}f + \dim_{\mathbb{K}}\text{Im}g - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}f \cap \text{Im}g)$ d'après la formule de Grassmann
$\leq \dim_{\mathbb{K}}\text{Im}f + \dim_{\mathbb{K}}\text{Im}g = \text{rg}f + \text{rg}g$.

b) On a $\text{rg}(f) = \text{rg}(\lambda f) = \text{rg}(\lambda f + g - g) \leq \text{rg}(\lambda f + g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(\lambda f + g) + \text{rg}(g)$.
Donc $\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(\lambda f + g)$.
Puis $\text{rg}(g) = \text{rg}(\lambda f + g - \lambda f) \leq \text{rg}(\lambda f + g) + \text{rg}(-\lambda f) = \text{rg}(\lambda f + g) + \text{rg}(f)$.
Ainsi $\text{rg}(g) - \text{rg}(f) \leq \text{rg}(\lambda f + g)$.
Donc $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq rg(\lambda f + g)$ complète l'inégalité triangulaire sur les rangs.

Exo 12 : **a)** Soient $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a $f(u_1 + \lambda u_2, v_1 + \lambda v_2) = u_1 + \lambda u_2 + v_1 + \lambda v_2 = (u_1 + v_1) + \lambda(u_2 + v_2) = f(u_1, v_1) + \lambda f(u_2, v_2)$. Donc f est bien linéaire.

b) Soit $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$. On a $(u_1, u_2) \in \text{Ker}f$ ssi $u_1 + u_2 = 0$ ssi $u_1 = -u_2 \in E_1 \cap E_2$.
Donc $\text{Ker}f = \{(u, -u) \text{ pour } u \in E_1 \cap E_2\}$.
Par définition, on a $f(E_1 \times E_2) = \{u_1 + u_2 \text{ pour } u_1 \in E_1 \text{ et } u_2 \in E_2\} = E_1 + E_2$.

c) Le théorème du rang montre que $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times E_2) = \dim_{\mathbb{K}} \ker f + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im} f = \dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cap E_2) + \dim_{\mathbb{K}}(E_1 + E_2)$. Or $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times E_2) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2$.
Donc on obtient la formule de Grassmann : $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 + E_2) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2 - \dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cap E_2)$

Exo 13 : **a)** Pour $v \in E$, on pose $u = v - (g \circ f)(v) \in E$. On a $f(u) = f(v) - f(g(f(v))) = f(v) - f(v) = 0_F$. Donc $u \in \text{Ker}f$.

b) Soit $u \in \text{Ker}f \cap \text{Im}(g \circ f)$ alors $u = (g \circ f)(v)$ puis $0_F = f(u) = f(g(f(v))) = f(v)$ donc $u = g(f(v)) = g(0_F) = 0_E$. Ainsi $\text{Ker}f \cap \text{Im}(g \circ f) = \{0_E\}$.
Soit $v \in E$, on a $v = [v - (g \circ f)(v)] + (g \circ f)(v) \in \text{Ker}f + \text{Im}(g \circ f)$ d'après a)

c) On peut en déduire $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker} f + \text{rg}(g \circ f)$.
Puis le théorème du rang donne également $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker} f + \text{rg}(f)$.
On en déduit donc $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg} f$. Puis $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg} f, \text{rg} g) \leq \text{rg}(g)$ d'après le cours. Donc $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(g)$.

Exo 14 : **a)** Soit D une droite supplémentaire de H alors $E = D \oplus H$ donc $n = 1 + \dim H$.
Ainsi les hyperplans sont de dimension $n - 1$.
Pour deux hyperplans distincts, on a $n - 1 = \dim H_1 < \dim(H_1 + H_2) \leq n$ car on a les inclusions $H_1 \subsetneq (H_1 + H_2) \subset E$. Donc $\dim(H_1 + H_2) = n$ puis la formule de Grassmann montre que $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = (n-1) + (n-1) - n = n - 2$.

b) Pour $f : E \to \mathbb{R}$ non nulle. On a $\{0\} \subsetneq \text{Im} f \subset \mathbb{R}$ donc $\text{rg} f = \dim \text{Im} f = 1$. D'après le théorème du rang, on en déduit $\dim \text{Ker} f = \dim E - \text{rg} f = n - 1$. C'est donc un hyperplan de E.

c) Soit H un hyperplan de E et D un droite supplémentaire. On introduit $d \in D$ un vecteur directeur (i.e. non nul) de D. Pour $u \in E$, on a une unique écriture $u = h_u + \lambda_u d$ car $E = H \oplus \text{Vect}\,(d)$. Donc on peut construire l'application $f : E \to \mathbb{R}, u \mapsto \lambda_u$. C'est bien une application linéaire. Et $f(H) = \{0\}$ donc $H \subset \text{Ker} f$. D'après ce qui précède on a également $\dim H = n - 1 = \dim \text{Ker} f$. Donc $H = \text{Ker} f$ est bien le noyau d'une forme linéaire (i.e. une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$)

Exo 15 : **a)** On a $\text{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ donc $\text{rg} f = \dim \text{Im} f \leq 2$ càd $\text{rg}(f) \in \{0, 1, 2\}$.

b) Pour $u \in E$, on note $f(u) = (f_x(u), f_y(u)) \in \mathbb{R}^2$ avec $f_x(u) \in \mathbb{R}$ et $f_y(u) \in \mathbb{R}$. On a $p_1(f(u)) = f_x(u)$ et $p_2(f(u)) = f_y(u)$.
Puis $u \in \text{Ker} f$ ssi $f(u) = (0, 0)$ ssi $f_x(u) = f_y(u) = 0$ ssi $p_1(f(u)) = p_2(f(u)) = 0$ ssi $u \in \text{Ker}(p_1 \circ f) \cap \text{Ker}(p_2 \circ f)$.
Donc $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(p_1 \circ f) \cap \text{Ker}(p_2 \circ f)$

c) On a alors $\text{Im} f = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ car de dimension 1. Donc on a $bp_1 \circ f - ap_2 \circ f = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})}$.
En effet, pour $u \in E, f(u) = \lambda_u \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$. Donc $p_1 \circ f(u) = \lambda_u a$ et $p_2 \circ f(u) = \lambda_u b$. Puis on trouve bien $bp_1 \circ f(u) - ap_2 \circ f(u) = 0$.

d) Si f est surjective alors $\text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker} f = \dim E - \text{rg} f = n - 2$.
Réciproquement pour F un espace de dimension $n - 2$. D'après l'exercice précédent,

F est l'intersection de deux hyperplans H_1 et H_2. Puis $H_1 = \mathrm{Ker} f_1$ et $H_2 = \mathrm{Ker} f_2$. Donc en posant $f(u) = (f_1(u), f_2(u))$. On obtient $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f_1 \cap \mathrm{Ker} f_2 = H_1 \cap H_2$. Avec $\dim \mathrm{Ker} f = n-2$ donc $\mathrm{rg} f = \dim E - \dim \mathrm{Ker} f = 2$ d'après le théorème du rang.