

TD 16-Corrigé : Application linéaire

16.1 Contexte explicite

Indications : Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ est linéaire, on commence par vérifier que E et F sont des espaces vectoriels. Puis on montre que $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'image est engendré par l'image d'une base $\text{Im}f = \text{Vect} f(\mathcal{B}_E)$.

Le noyau est obtenue en résolvant le système $f(u) = 0_F$.

On peut en général utiliser le théorème du rang pour obtenir un lien entre noyau et image.

$$\dim E = \dim \text{Im}f + \dim \text{Ker}f$$

Exo 1 : a) Soient $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } f_1(u_1 + \lambda u_2) &= f_1 \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ y_1 + \lambda y_2 \end{pmatrix} = 2(x_1 + \lambda x_2) - 3(y_1 + \lambda y_2) = (2x_1 - 3y_1) + \lambda(2x_2 - 3y_2) \\ &= f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda f_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = f_1(u_1) + \lambda f_1(u_2). \end{aligned}$$

Donc $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est bien une application linéaire.

$$\text{On a } \text{Im}f_1 = f_1(\mathbb{R}^2) = f_1(\text{Vect}_{\mathbb{R}} \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{ f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} = \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \text{Ker}f_1 &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 2x - 3y = 0 \} = \\ &= \{ \begin{pmatrix} 3y/2 \\ y \end{pmatrix} \text{ pour } y \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Soient $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } f_2(u_1 + \lambda u_2) &= f_2 \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ y_1 + \lambda y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + \lambda x_2) - 2(y_1 + \lambda y_2) \\ 3(x_1 + \lambda x_2) - 6(y_1 + \lambda y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ 3x_1 - 6y_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - 2y_2 \\ 3x_2 - 6y_2 \end{pmatrix} \\ &= f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda f_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = f_2(u_1) + \lambda f_2(u_2). \end{aligned}$$

Donc $f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est bien une application linéaire.

$$\text{On a } \text{Im}f_2 = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{ f_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ car les vecteurs sont colinéaires et donc engendrent une droite vectorielle.}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \text{Ker}f_2 &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x - 2y = 3x - 6y = 0 \} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x = 2y \} = \{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} \text{ pour } y \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Soient $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } f_3(u_1 + \lambda u_2) &= f_3 \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ y_1 + \lambda y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(x_1 + \lambda x_2) - (y_1 + \lambda y_2) \\ (x_1 + \lambda x_2) + i(y_1 + \lambda y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_1 - y_1 \\ x_1 + iy_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} ix_2 - y_2 \\ x_2 + iy_2 \end{pmatrix} \\ &= f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda f_3 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = f_3(u_1) + \lambda f_3(u_2). \end{aligned}$$

Donc $f_3 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ est bien une application linéaire.

$$\text{On a } \text{Im}f_3 = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \{ f_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car les vecteurs sont colinéaires } \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et donc engendrent une droite vectorielle.}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \text{Ker}f_3 &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } ix - y = x + iy = 0 \} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } y = ix \} \text{ car ce sont les mêmes équations} \\ &= \{ \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{C} \} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Soient $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } f_4(u_1 + \lambda u_2) &= f_4 \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ y_1 + \lambda y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x_1 + \lambda x_2) + 5(y_1 + \lambda y_2) \\ (x_1 + \lambda x_2) - 2(y_1 + \lambda y_2) \\ 2(x_1 + \lambda x_2) - (y_1 + \lambda y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5y_1 \\ x_1 - 2y_1 \\ 2x_1 - y_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3x_2 + 5y_2 \\ x_2 - 2y_2 \\ 2x_2 - y_2 \end{pmatrix} \\ &= f_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda f_4 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = f_4(u_1) + \lambda f_4(u_2). \end{aligned}$$

Donc $f_4 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ est bien une application linéaire.

16.1 Contexte explicite

On a $\text{Im}f_4 = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{f_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, un plan vectorielle.

On a $\text{Ker}f_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 3x + 5y = x - 2y = 2x - y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

e) Soient $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $f_5(u_1 + \lambda u_2) = f_5 \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ y_1 + \lambda y_2 \\ z_1 + \lambda z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + \lambda x_2) + 5(y_1 + \lambda y_2) - (z_1 + \lambda z_2) \\ -(x_1 + \lambda x_2) + 2(y_1 + \lambda y_2) - 2(z_1 + \lambda z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5y_1 - z_1 \\ -x_1 + 2y_1 - 2z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 + 5y_2 - z_2 \\ -x_2 + 2y_2 - 2z_2 \end{pmatrix} = f_5 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda f_5 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = f_5(u_1) + \lambda f_5(u_2)$.

Donc $f_5 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ est bien une application linéaire.

On a $\text{Im}f_5 = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ f_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$, car il y a deux vecteurs non colinéaires dans un espace de dimension 2 donc la famille est génératrice.

On a $\text{Ker}f_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + 5y - z = -x + 2y - 2z = 0 \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = -5y + z \text{ et } 7y = 3z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -(8/7)z \\ (3/7)z \\ z \end{pmatrix} \text{ pour } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exo 2 : On détermine la nature de la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ en calculant son rang.

On a $\text{rg}\mathcal{B} = 4 = \text{Card}\mathcal{B} = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ donc c'est une base de l'espace.

D'après le cours, une application linéaire est fixée de manière unique par l'image d'une base.

On a donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ à déterminer car la famille est génératrice. On doit ainsi résoudre le système associée à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim_L \dots \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 29/39 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/39 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21/26 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/39 \\ 5/39 \\ -8/13 \\ 21/26 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \frac{29}{39}u_1 + \frac{5}{39}u_2 - \frac{8}{13}u_3 + \frac{21}{26}u_4.$$

Puis $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(u) = \frac{29}{39}f(u_1) + \frac{5}{39}f(u_2) - \frac{8}{13}f(u_3) + \frac{21}{26}f(u_4) = \frac{31}{13}$ car $f(u_k) = k$ d'après l'énoncé.

On a $\text{Im}f = \text{Vect}_{\mathbb{R}}f(\mathcal{B}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4) = \mathbb{R}$. Donc l'application est surjective.

Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^4$ exprimé dans la base \mathcal{B} . On a $f(u) = 0$ ssi $a + 2b + 3c + 4d = 0$ ssi $a = -2b - 3c - 4d$ avec $b, c, d \in \mathbb{R}$ des paramètres.

Donc $\text{Ker}f = \left\{ \begin{pmatrix} -2b-3c-4d \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ pour } b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right\}$
 $= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -19 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -28 \\ -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -40 \\ -4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
 exprimé dans la base canonique.

Exo 3 : a) On étudie la famille (v_1, v_2, v_3) . On a $v_2 + v_3 = 2v_1$. Donc la famille est liée.

Si il existait une telle application linéaire alors $e_2 + e_3 = f(v_2 + v_3) = f(2v_1) = 2e_1$.

Ainsi la famille (e_1, e_2, e_3) est liée Absurde pour une base.

16.1 Contexte explicite

b) La famille (v_1, v_2) est libre. On peut la compléter en une base (v_1, v_2, u) de \mathbb{R}^3 (par exemple $u = e_1$ convient).

Soit $w \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque, il existe une unique application $f_w \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $f_w(v_1) = e_1, f_w(v_2) = e_2$ et $f_w(u) = w$. De plus, on a $f_w(v_3) = f_w(2v_1 - v_2) = 2e_1 - e_2$. Donc f_w vérifie les conditions de l'énoncé et il existe autant de telles applications que de choix de $w \in \mathbb{R}^3$ c'est à dire une infinité.

Exo 4 : a) On dispose de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, i)$ de \mathbb{C} en tant que \mathbb{R} -ev. Donc f est entièrement déterminée par $f(1)$ et $f(i)$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = xf(1) + yf(i) = \frac{z+\bar{z}}{2}f(1) + \frac{z-\bar{z}}{2i}f(i) = \frac{f(1)-if(i)}{2}z + \frac{f(1)+if(i)}{2}\bar{z}$. Ainsi $a = \frac{f(1)-if(i)}{2}$ et $b = \frac{f(1)+if(i)}{2}$ conviennent.

b) L'application est \mathbb{C} -linéaire si on a de plus $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Donc en particulier, il faut $f(i) = if(1)$. Ce fournit des simplifications : $a = \frac{f(1)-if(i)}{2} = f(1)$ et $b = \frac{f(1)+if(i)}{2} = 0$.

Donc $f(z) = f(1)z$ sont bien les seules applications \mathbb{C} -linéaires.

Exo 5 : a) Soient $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $f((u_n + \lambda v_n)_{n \geq 0}) = ((u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) - (u_n + \lambda v_n))_{n \geq 0} = (u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0} + \lambda(v_{n+1} - v_n)_{n \geq 0} = f((u_n)_{n \geq 0}) + \lambda f((v_n)_{n \geq 0})$.

Donc f est bien linéaire.

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a $(u_n)_{n \geq 0} \in \text{Ker} f$ ssi $(u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0} = (0)_{n \geq 0}$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0$ ssi $(u_n)_{n \geq 0}$ est constante.

Donc $\text{Ker} f = \{(c)_{n \geq 0} \text{ pour } c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1)_{n \geq 0}$.

Puis $\text{Im} f = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Car pour $(v_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut définir pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Alors on a $f((u_n)_{n \geq 0}) = (v_n)_{n \geq 0} \in \text{Im} f$ car $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^n v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_n$.

b) Soit $q \in \mathbb{R}$. Une suite géométrique vérifie $u_{n+1} = qu_n$ donc $f(u_n) = (q-1)u_n$ puis $(f - (q-1)\text{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})(u_n) = 0$. Ainsi $\text{Ker}[f - (q-1)f^0]$ est bien l'espace vectoriel des suites de raison q .

Exo 6 : a) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(f(P)) = \deg(P + (1-X)P') \leq \max(\deg P, 1 + \deg P') = \deg P \leq n$. Donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et les espaces de f sont bien définies.

Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f(P_1 + \lambda P_2) = (P_1 + \lambda P_2) + (1-X)(P_1 + \lambda P_2)' = P_1 + (1-X)P_1' + \lambda(P_2 + (1-X)P_2') = f(P_1) + \lambda f(P_2)$. Donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $P \in \text{Ker} f$. On a $f(P) = 0$ donc $(X-1)P' - P = 0$ est associée à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $y'(t) - \frac{1}{t-1}y(t) = 0$. Ainsi $y(t) =$

$\lambda \exp \ln |t-1| = \begin{cases} \lambda_1(t-1) & \text{si } t < 1 \\ \lambda_2(t-1) & \text{si } t > 1 \end{cases}$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Donc les solutions polynomiales sont $P(X) = \lambda(X-1)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\text{Ker} f = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X-1)$.

On a $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, X, \dots, X^n)$ donc $\text{Im} f = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f(1), f(X), \dots, f(X^n))$.

Or $f(X-1) = 0$ donc $f(X) = f(1) = 1$. Puis pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket, f(X^k) = X^k + k(1-X)X^{k-1} = (1-k)X^k + kX^{k-1}$ de degré k .

Ainsi la famille $(1, f(X^2), \dots, f(X^n)) = (1, -X^2 + 2X, \dots, (1-n)X^n + nX^{n-1})$ est libre car échelonnée en degré.

Donc $\text{Im} f = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, -X^2 + 2X, \dots, (1-n)X^n + nX^{n-1})$.

16.2 Contexte abstrait

Exo 7 : Pour $x \notin \text{Ker}(f^{n-1})$, on a $f^{n-1}(x) \neq 0_E$ et $\forall i \geq n, f^i(x) = 0_E$. La famille $\mathcal{F} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ de n vecteurs dans un espace de dimension n . Donc $\text{Card}\mathcal{F} = \dim_{\mathbb{R}} E$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_E$.

On démontre par récurrence totale que $\lambda_k = 0$.

Init : On a $0_E = f^{n-1}(0_E) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1}(f^i(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n+i-1}(x) = \lambda_0 f^{n-1}(x)$. Donc $\lambda_0 = 0$.

Heré : Soit $0 \leq k \leq n-1$ tq $\forall i \leq k, \lambda_i = 0$, alors $0_E = f^{n-k-2}(0_E) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-k-2}(f^i(x)) = 0_E + \dots + 0_E + \sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^{n+i-k-2}(x) = \lambda_{k+1} f^{n-1}(x) + 0_E + \dots + 0_E$ donc $\lambda_{k+1} = 0$.

Ccl : Ainsi $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ et la famille \mathcal{F} est libre.

Par thm de caractérisation, la famille \mathcal{F} est une base de E .

Exo 8 : a) (\Leftarrow) On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g = h \circ f$.

Soit $u \in \text{Ker} f$. Alors $g(u) = h(f(u)) = h(0) = 0$ donc $u \in \text{Ker} g$.

(\Rightarrow) On suppose que $\text{Ker} f \subset \text{Ker} g$. On considère un supplémentaire S de $\text{Ker} f$ dans E i.e. $E = S \oplus \text{Ker} f$. Alors $f|_S^{\text{Im} f}$ est une application injective $\text{Ker} f|_S^{\text{Im} f} = S \cap \text{Ker} f = 0$ et surjective $\text{Im} f = f(E) = f(S + \text{Ker} f) = f(S) = \text{Im} f|_S^{\text{Ker} f}$. Donc $f|_S^{\text{Im} f}$ est un isomorphisme et on pose $h = g \circ (f|_S^{\text{Im} f})^{-1}$ pour avoir $g = h \circ f$.

b) (\Leftarrow) On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g \circ h$.

Alors $\text{Im} f = f(E) = g(h(E)) \subset g(E) = \text{Im} g$ car $h(E) \subset E$.

(\Rightarrow) On suppose que $\text{Im} f \subset \text{Im} g$. Alors de même en considérant un supplémentaire de $\text{Ker} g$ dans E . On obtient $g|_S^{\text{Im} g}$ est un isomorphisme et on peut poser $h(u) = (g|_S^{\text{Im} g})^{-1}(f(u))$ bien défini car $f(u) \in \text{Im} f \subset \text{Im} g$ l'espace de départ de $(g|_S^{\text{Im} g})^{-1}$. Ainsi $f = g \circ h$.

Exo 9 : a) On suppose par l'absurde que $p = \lambda q$. Alors $p = p^2 = (\lambda q)^2 = \lambda^2 q^2 = \lambda^2 q$. Ainsi $\lambda q = p = \lambda^2 q$ avec $q \neq 0$. Donc $\lambda^2 = \lambda$ puis $\lambda \in \{0, 1\}$. Ceci est absurde car si $\lambda = 1$ alors $p = q$ et si $\lambda = 0$ alors $p = 0$.

b) (\Leftarrow) On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$ alors $(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p^2 + 0 + 0 + q^2 = p^2 + q^2$. Donc $p + q$ est un projecteur.

(\Rightarrow) On suppose que $(p + q)^2 = p + q$ alors $0 = (p + q)^2 - (p + q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 - p - q = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 - p - q$ car $p^2 = p$ et $q^2 = q$. Puis $p \circ q = -q \circ p = -q^2 \circ p = -q \circ (q \circ p) = q \circ p \circ q = -p \circ q \circ q = -p \circ q$ car $q \circ q = q$.

Ainsi $p \circ q = -p \circ q$ donc $p \circ q = 0$. Enfin $q \circ p = -p \circ q = 0$.

c) On montre que $\text{Im}(p + q) = \text{Im} p \oplus \text{Im} q$.

En effet, si $u \in \text{Im} p \cap \text{Im} q$ alors $u = p(u) = q(u)$ car l'image d'un projecteur est invariante. Donc $0 = p(q(u)) = p(u) = u$.

Puis pour $u \in \text{Im}(p + q)$ alors $u = (p + q)(u) = p(u) + q(u) \in \text{Im} p + \text{Im} q$.

Réciproquement, pour $u = p(x) + q(y) \in \text{Im} p + \text{Im} q$, on a $(p + q)(u) = (p + q)(p(x)) + (p + q)(q(y)) = p(p(x)) + q(p(x)) + p(q(y)) + q(q(y)) = p(x) + 0 + 0 + p(y) = u$. Donc $u = (p + q)(u) \in \text{Im}(p + q)$.

On démontre que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker} p \cap \text{Ker} q$.

Pour $u \in \text{Ker} p \cap \text{Ker} q$, on a $(p + q)(u) = p(u) + q(u) = 0 + 0 = 0$. Donc $u \in \text{Ker}(p + q)$.

Réciproquement pour $u \in \text{Ker}(p + q)$, on a $p(u) + q(u) = 0$. Donc $0 = p(0) = p(p(u)) + p(q(u)) = p(u) + 0 = p(u)$ donc $u \in \text{Ker} p$. Et $0 = q(u) = q(p(u)) + q(q(u)) = q(u)$ donc $u \in \text{Ker} q$. Ainsi $u \in \text{Ker} p \cap \text{Ker} q$.

Exo 10 : (\Rightarrow) On suppose $\text{Ker} f = \text{Im} f$. Alors pour $u \in E, f^2(u) = f(f(u)) = 0$ car $f(u) \in \text{Ker} f$. Et $\text{rg}_{\mathbb{R}}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Im} f = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker} f = \dim_{\mathbb{R}} E - \text{rg}_{\mathbb{R}} f$ d'après le théorème du rang.

(\Leftarrow) On suppose que $f^2 = 0$ et $n = 2 \text{rg}(f)$.

On a $\text{Im} f \subset \text{Ker} f$ car pour $v = f(u) \in \text{Im} f$, on a $f(v) = f^2(u) = 0$ d'où $v \in \text{Ker} f$.

Puis le théorème du rang donne $\text{rg}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}f = n = 2\text{rg}(f)$ donc $\dim \text{Ker}f = \text{rg}f = \dim \text{Im}f$.

Ainsi par dimension les espaces vectoriels $\text{Ker}f = \text{Im}f$.

Exo 11 : a) On a $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}f + \text{Im}g$ car pour $v = (f + g)(u) \in \text{Im}(f + g)$ alors $v = f(u) + g(u) \in \text{Im}f + \text{Im}g$. Donc $\text{rg}(f + g) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f + g) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}f + \text{Im}g) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}f + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}g - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}f \cap \text{Im}g)$ d'après la formule de Grassmann $\leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}f + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}g = \text{rg}f + \text{rg}g$.

b) On a $\text{rg}(f) = \text{rg}(\lambda f) = \text{rg}(\lambda f + g - g) \leq \text{rg}(\lambda f + g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(\lambda f + g) + \text{rg}(g)$.
Donc $\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(\lambda f + g)$.
Puis $\text{rg}(g) = \text{rg}(\lambda f + g - \lambda f) \leq \text{rg}(\lambda f + g) + \text{rg}(-\lambda f) = \text{rg}(\lambda f + g) + \text{rg}(f)$.
Ainsi $\text{rg}(g) - \text{rg}(f) \leq \text{rg}(\lambda f + g)$.
Donc $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(\lambda f + g)$ complète l'inégalité triangulaire sur les rangs.

Exo 12 : a) Soient $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a $f(u_1 + \lambda u_2, v_1 + \lambda v_2) = u_1 + \lambda u_2 + v_1 + \lambda v_2 = (u_1 + v_1) + \lambda(u_2 + v_2) = f(u_1, v_1) + \lambda f(u_2, v_2)$. Donc f est bien linéaire.

b) Soit $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$. On a $(u_1, u_2) \in \text{Ker}f$ ssi $u_1 + u_2 = 0$ ssi $u_1 = -u_2 \in E_1 \cap E_2$.
Donc $\text{Ker}f = \{(u, -u) \text{ pour } u \in E_1 \cap E_2\}$.
Par définition, on a $f(E_1 \times E_2) = \{u_1 + u_2 \text{ pour } u_1 \in E_1 \text{ et } u_2 \in E_2\} = E_1 + E_2$.

c) Le théorème du rang montre que $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times E_2) = \dim_{\mathbb{K}} \text{ker}f + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}f = \dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cap E_2) + \dim_{\mathbb{K}}(E_1 + E_2)$. Or $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times E_2) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2$.
Donc on obtient la formule de Grassmann : $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 + E_2) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2 - \dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cap E_2)$

Exo 13 : a) Pour $v \in E$, on pose $u = v - (g \circ f)(v) \in E$. On a $f(u) = f(v) - f(g(f(v))) = f(v) - f(v) = 0_F$. Donc $u \in \text{Ker}f$.

b) Soit $u \in \text{Ker}f \cap \text{Im}(g \circ f)$ alors $u = (g \circ f)(v)$ puis $0_F = f(u) = f(g(f(v))) = f(v)$ donc $u = g(f(v)) = g(0_F) = 0_E$. Ainsi $\text{Ker}f \cap \text{Im}(g \circ f) = \{0_E\}$.
Soit $v \in E$, on a $v = [v - (g \circ f)(v)] + (g \circ f)(v) \in \text{Ker}f + \text{Im}(g \circ f)$ d'après a)

c) On peut en déduire $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}f + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}f + \text{rg}(g \circ f)$.
Puis le théorème du rang donne également $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}f + \text{rg}(f)$.
On en déduit donc $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}f$. Puis $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}f, \text{rg}g) \leq \text{rg}(g)$ d'après le cours. Donc $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(g)$.

Exo 14 : a) Soit D une droite supplémentaire de H alors $E = D \oplus H$ donc $n = 1 + \dim H$.
Ainsi les hyperplans sont de dimension $n - 1$.

Pour deux hyperplans distincts, on a $n - 1 = \dim H_1 < \dim(H_1 + H_2) \leq n$ car on a les inclusions $H_1 \subsetneq (H_1 + H_2) \subset E$. Donc $\dim(H_1 + H_2) = n$ puis la formule de Grassmann montre que $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2$.

b) Pour $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ non nulle. On a $\{0\} \subsetneq \text{Im}f \subset \mathbb{R}$ donc $\text{rg}f = \dim \text{Im}f = 1$. D'après le théorème du rang, on en déduit $\dim \text{Ker}f = \dim E - \text{rg}f = n - 1$. C'est donc un hyperplan de E .

c) Soit H un hyperplan de E et D un droite supplémentaire. On introduit $d \in D$ un vecteur directeur (i.e. non nul) de D . Pour $u \in E$, on a une unique écriture $u = h_u + \lambda_u d$ car $E = H \oplus \text{Vect}(d)$. Donc on peut construire l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \lambda_u$. C'est bien une application linéaire. Et $f(H) = \{0\}$ donc $H \subset \text{Ker}f$. D'après ce qui précède on a également $\dim H = n - 1 = \dim \text{Ker}f$. Donc $H = \text{Ker}f$ est bien le noyau d'une forme linéaire (i.e. une application linéaire à valeurs dans \mathbb{K})

Exo 15 : a) On a $\text{Im}f \subset \mathbb{R}^2$ donc $\text{rg}f = \dim \text{Im}f \leq 2$ càd $\text{rg}(f) \in \{0, 1, 2\}$.

b) Pour $u \in E$, on note $f(u) = (f_x(u), f_y(u)) \in \mathbb{R}^2$ avec $f_x(u) \in \mathbb{R}$ et $f_y(u) \in \mathbb{R}$. On a $p_1(f(u)) = f_x(u)$ et $p_2(f(u)) = f_y(u)$.
Puis $u \in \text{Ker}f$ ssi $f(u) = (0, 0)$ ssi $f_x(u) = f_y(u) = 0$ ssi $p_1(f(u)) = p_2(f(u)) = 0$ ssi $u \in \text{Ker}(p_1 \circ f) \cap \text{Ker}(p_2 \circ f)$.

Donc $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(p_1 \circ f) \cap \text{Ker}(p_2 \circ f)$

- c) On a alors $\text{Im}f = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$ car de dimension 1. Donc on a $bp_1 \circ f - ap_2 \circ f = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})}$. En effet, pour $u \in E$, $f(u) = \lambda_u \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Donc $p_1 \circ f(u) = \lambda_u a$ et $p_2 \circ f(u) = \lambda_u b$. Puis on trouve bien $bp_1 \circ f(u) - ap_2 \circ f(u) = 0$.
- d) Si f est surjective alors $\text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker}f = \dim E - \text{rg}f = n - 2$.

Réciproquement pour F un espace de dimension $n - 2$. D'après l'exercice précédent, F est l'intersection de deux hyperplans H_1 et H_2 . Puis $H_1 = \text{Ker}f_1$ et $H_2 = \text{Ker}f_2$. Donc en posant $f(u) = (f_1(u), f_2(u))$. On obtient $\text{Ker}f = \text{Ker}f_1 \cap \text{Ker}f_2 = H_1 \cap H_2$. Avec $\dim \text{Ker}f = n - 2$ donc $\text{rg}f = \dim E - \dim \text{Ker}f = 2$ d'après le théorème du rang.