

TD 19 - Corrigé

19.1 Recherche d'équivalent

Exo 1 : a) On a $n^4 + 3n^2 - 5 \sim_{+\infty} n^4$ car $1 =_{+\infty} o(n^4)$ et $n^2 =_{+\infty} o(n^4)$.

b) On a $3^n - n^3 + 10 \sim_{+\infty} 3^n$ car $1 =_{+\infty} o(3^n)$ et $n^3 =_{+\infty} o(3^n)$

c) On a $\ln^n(n) + 3^n - n^9 \sim_{+\infty} \ln^n(n)$ car $n^9 =_{+\infty} o(3^n)$ et $3^n =_{+\infty} o(\ln^n(n))$.

En effet $\frac{\ln^n(n)}{3^n} = \left(\frac{\ln(n)}{3}\right)^n \geq 2^n \rightarrow +\infty$ pour $n \geq e^6$.

d) On a $\frac{3^n + 2^n n^2}{\ln^2(n) - n^2} \sim_{+\infty} \frac{3^n}{-n^2}$.

Car $\frac{2^n n^2}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n n^2 \rightarrow 0$ donc $2^n n^2 =_{+\infty} o(3^n)$.

Et $\ln^2(n) =_{+\infty} o(n^2)$.

e) On a $\ln(1+n) \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \ln(n) \frac{1}{n} = \frac{\ln n}{n}$. Car $\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$.

f) On a $\sqrt{4n+1} - 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n}((1 + 1/(4n))^{1/2} - 1)$
 $=_{+\infty} 2\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n}$

Et $\sqrt{(n+1)^3} - n\sqrt{n} = n^{3/2} \left((1 + 1/n)^{3/2} - 1\right)$
 $=_{+\infty} n^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \sim_{+\infty} \frac{3}{2} n^{1/2}$.

Donc $\frac{\sqrt{4n+1} - 2\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^3} - n\sqrt{n}} \sim_{+\infty} \frac{n^{-1/2}/4}{3n^{1/2}/2} = \frac{1}{6n}$.

g) On a $1 + a^n + n^\alpha \sim_{+\infty} \begin{cases} a^n & \text{si } a > 1 \\ n^\alpha & \text{si } a \leq 1 \end{cases}$

Et $\ln^\beta + n^\alpha \sim_{+\infty} n^\alpha$ car $\alpha > 0$.

Donc $\frac{1 + a^n + n^\alpha}{\ln^\beta n + n^\alpha} \sim_{+\infty} \begin{cases} \frac{a^n}{n^\alpha} & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a \leq 1 \end{cases}$.

h) On a $\sqrt{n^4 + 3n} - n^2 = n^2 \left((1 + 3/n^3)^{1/2} - 1\right)$
 $= n^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{6n}$.

i) On a $\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ et $1 - e^x \sim_{x \rightarrow 0} -x$.

Donc $1 - e^{2\ln(1+\frac{1}{n})} =_{+\infty} 1 - e^{2/n+o(1/n)} \sim_{+\infty} \frac{-2}{n}$

j) On a $\ln\left(n + \frac{1}{n^5}\right) - \ln n = \ln n + \ln(1 + n^{-6}) - \ln n = \ln(1 + n^{-6}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^6}$

k) On a $\sin\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1 - \cos \frac{1}{n}$ car $\sin x \sim_{x \rightarrow 0} x$.

Puis $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3)$ donc $1 - \cos \frac{1}{n} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$.

l) On note $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. On a $\ln(\cos \frac{1}{n}) + \cos(\tan \frac{2}{n}) - 1 = \ln(\cos x_n) + \cos(\tan(2x_n)) - 1$
 $=_{x_n \rightarrow 0} \ln(1 - x_n^2/2 + o(x_n^3)) + \cos(2x_n + o(x_n^2)) - 1$
 $=_{x_n \rightarrow 0} -x_n^2/2 + o(x_n^3) + 1 - (2x_n)^2/2 + o(x_n^2) - 1 \sim_{x_n \rightarrow 0} -\frac{5}{2}x_n =_{+\infty} -\frac{5}{2n}$.

m) On a $\sin \ln\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) \sim_{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$.

Exo 2 : On a $e^{u_n} - e^{v_n} = e^{v_n}(e^{u_n-v_n} - 1) \sim e^0(u_n - v_n)$ car $v_n \rightarrow 0$ et $(u_n - v_n) \rightarrow 0$.

19.2 Recherche d'équivalent de suite autonome

Exo 3 : a) On a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$. Donc la suite est croissante.

En posant $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$ croissante sur $]0, 1[$. On trouve $f(]0, 1[) =]f(0), f(1)[=]1/2, 1[$. Donc l'intervalle est stable par f et par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite est croissante et majorée. Donc elle converge vers $l \in]0, 1]$ un point fixe. Puis $f(l) = l$ ssi $l = 1$.

$$\begin{aligned} \text{b) On note } v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2}{u_n^2 - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{2 - (u_n + 1)}{(u_n - 1)(u_n + 1)} = \frac{-1}{u_n + 1} \rightarrow \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

c) D'après le Lemme de Cesàro $\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim_{n \rightarrow +\infty} -n/2$.

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_0 - 1} \sim_{+\infty} \frac{1}{u_n - 1} \text{ par télescopage.}$$

$$\text{Donc } u_n - 1 \sim \frac{-2}{n}. \text{ C'est à dire } u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exo 4 : a) Pour $n \geq 1$, on écrit $n = k + 1$. On a $u_{k+1} - 2 = \frac{u_k^2 - 2u_k + 1}{u_k} = \frac{(u_k - 1)^2}{u_k} \geq 0$.

Donc $u_n = u_{k+1} \geq 2 > 1$.

b) On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ donc la suite est croissante.

c) On suppose par l'absurde que u_n est majorée alors elle admet une limite finie $l \geq 1$ tel que $l = l + 1/l$ donc $1/l = 0$ est absurde. Puis la suite est croissante et non majorée donc $u_n \rightarrow +\infty$.

d) On a $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_n + 1/u_n)^2 - u_n^2 = 2 + 1/u_n^2 \rightarrow 2$ car $1/u_n^2 \rightarrow 0$.

e) D'après le lemme de Cesàro $u_n^2 = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim_{+\infty} u_0 + 2n \sim 2n$.

Donc $u_n \sim_{+\infty} \sqrt{2n}$.

Exo 5 : a) On a $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} \geq 0$. Donc la suite est croissante. Si il est majorée alors elle tend vers $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = l + e^{-l}$. Or $e^{-l} = 0$ est absurde. Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et non majorée. Puis $u_n \rightarrow +\infty$.

b) On note $v_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n} (\exp(u_{n+1} - u_n) - 1)$
 $= e^{u_n} (\exp(e^{-u_n}) - 1) = e^{u_n} (1 + e^{-u_n} + o(e^{-u_n}) - 1)$ car $e^{-u_n} \rightarrow 0$.
 $= 1 + o(1) \rightarrow 1$.

c) On en déduit $e^{u_n} = e^{u_0} + \sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim e^{u_0} + 1.n \sim n = n + o(n)$.

Donc $u_n = \ln(e^{u_n}) = \ln(n + o(n)) = \ln(n) + \ln(1 + o(1)) = \ln(n) + o(1) \sim \ln(n)$.

Exo 6 : a) On a $u_1 = \sin(u_0) \in]0, 1]$ qui est un intervalle stable par $\sin$.

Donc pour tout $n \geq 1, u_n \in]0, 1]$.

On note $g(x) = \sin x - x$ dérivable sur $]0, 1]$ avec $g'(x) = \cos x - 1 < 0$.

Ainsi g est décroissante et $g(x) < g(0) = 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ pour $n \geq 1$ et la suite est décroissante.

Elle converge vers un point fixe tel que $g(l) = l$ et $l \in [0, 1]$ donc $l = 0$.

- b) On a $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n = u_n - u_n^3/6 + o(u_n^4) - u_n \sim \frac{-u_n^3}{6}$.
- c) On a $v_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{u_{n+1}^2 - u_n^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} \sim \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)}{u_n^4}$ car $u_{n+1} \sim u_n$
 $\sim \frac{(-u_n^3/6)(2u_n)}{u_n^4} = -\frac{1}{3}$.
 Donc $v_n \rightarrow -\frac{1}{3}$.
- d) On a $\frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_0^2} - \sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \frac{n}{3}$. Donc $u_n \sim \sqrt{3/n}$.

19.3 Développement limité

- Exo 7 :** a) On a $\exp(\sin x) = \exp(x - x^3/6 + o(x^3))$
 $=_{x \rightarrow 0} 1 + (x - x^3/6) + (x - x^3/6)^2/2 + (x - x^3/6)^3/6 + o(x^3)$
 $=_{x \rightarrow 0} 1 + x + x^2/2 + o(x^3)$
- b) On a $\ln(\cos x) = \ln(1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))$
 $=_{x \rightarrow 0} -(x^2/2 - x^4/24) - (x^2/2)^2/2 + o(x^4)$
 $=_{x \rightarrow 0} -x^2/2 - x^4/12 + o(x^4)$
- c) On a $\frac{1}{1 - x^2 - x^3}$
 $=_{x \rightarrow 0} 1 + (x^2 + x^3) + (x^2 + x^3)^2 + o(x^5)$
 $=_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + o(x^5)$
- d) On a $(1+x)^x = \exp(x \ln(1+x))$
 $=_{x \rightarrow 0} \exp[x(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3))]$
 $=_{x \rightarrow 0} 1 + [x^2 - x^3/2 + x^4/3] + [x^2]^2/2 + o(x^4)$
 $=_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 - x^3/25x^4/6 + o(x^4)$
- e) $\ln \left[\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \right]$
 $= \ln(1 + \tan x) - \ln(1 - \tan x) = f(x) - f(-x)$.
 On a $f(x) = \ln(1 + \tan x) =_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x + x^3/3 + o(x^4))$
 $=_{x \rightarrow 0} (x + x^3/3) - (x + x^3/3)^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)$
 $=_{x \rightarrow 0} x - x^2/2 + 2x^3/3 - 7x^4/12 + o(x^4)$
 Donc $f(x) - f(-x) =_{x \rightarrow 0} 2x + 4x^3/3 + o(x^3)$.
- f) On pose $f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)$ de classe C^∞ au voisinage de 0.
 On a $f'(x) = \frac{[(1+2x) - 2(1+x)]/(1+2x)^2}{1 + (1+x)^2/(1+2x)^2}$
 $= \frac{-1}{(1+2x)^2 + (1+x)^2} = \frac{-1}{2 + 6x + 5x^2}$
 $= \frac{-1}{2} \frac{1}{1 + 3x + 5x^2/2}$
 $=_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2} (1 - (3x + 5x^2/2) + (3x)^2 + o(x^2))$
 $=_{x \rightarrow 0} (-1/2) + (3/2)x - (13/4)x^2 + o(x^2)$
 Donc en primitivant $f(x) =_{x \rightarrow 0} f(0) - x/2 + 3x^2/4 - 13x^3/12 + o(x^2)$
 avec $f(0) = \operatorname{Arctan}(1) = \pi/4$.

- Exo 8 :** a) On a $x^a \ln x \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$ et $x^2 - 1 \rightarrow_{x \rightarrow 0} -1$ donc $\lim_0 f_a = 0$ et la fonction se prolonge par continuité en 0.

On note $x = 1 + h$ au voisinage de 1. On a $f_a(1+h) = \frac{(1+h)^a \ln(1+h)}{(1+h)^2 - 1}$

$$= \frac{(1 + ah + o(h))(h - h^2/2 + o(h^2))}{2h + h^2} = \frac{h(1 + (a - 1/2)h + o(h))}{2h(1 + h/2)} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Donc la fonction se prolonge par continuité en 1.

b) Le développement limité en 1 donne :

$$f(1 + h) =_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}(1 + (a - 1/2)h + o(h))(1 - h/2 + o(h)) = \frac{1}{2}(1 + (a - 1)h + o(h)).$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{a-1}{2}$.

La définition de la dérivabilité en 0 donne :

$$\frac{f_a(x) - f_a(0)}{x - 0} = \frac{x^{a-1} \ln x}{x^2 - 1} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } a - 1 > 0 \\ +\infty & \text{si } a - 1 \leq 0 \end{cases}.$$

Donc f_a est dérivable en 0 ssi $a > 1$.

Exo 9 : **a)** On réalise le développement limité de $\frac{\sin x}{2 + \cos x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{2 + \cos x} &=_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^6)}{2 + 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)} \\ &=_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} (1 - x^2/6 + x^4/120 + o(x^5)) \frac{1}{1 - (x^2/6 - x^4/72 + o(x^5))} \\ &=_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} (1 - x^2/6 + x^4/120 + o(x^5)) (1 + (x^2/6 - x^4/72) + (x^2/6)^2 + o(x^5)) \\ &=_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} (1 + (1/120 - 1/72 + 1/36 - 1/36)x^4 + o(x^4)) \\ &=_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} - \frac{x^5}{540} + o(x^5). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} - \frac{x}{3} \sim -\frac{x^5}{540}$$

b) On a $(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} =_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$

Donc $\text{Arcsin } x = 0 + x + x^3/6 + 3x^5/40 + o(x^6)$

Et $\tan \tan x =_{x \rightarrow 0} \tan(x + x^3/3 + o(x^4))$

$$=_{x \rightarrow 0} (x + x^3/3) + (x)^3/3 + o(x^4) =_{x \rightarrow 0} x + 2x^3/3 + o(x^4).$$

Donc $\tan(\tan x) - \text{Arcsin } x =_{x \rightarrow 0} 2x^3/3 - x^3/6 + o(x^4)$

$$\sim_{x \rightarrow 0} x^3/2.$$

c) On a $x^3 \sqrt[3]{x-1} + x^3 = x^3(1 - (1-x)^{1/3}) =_{x \rightarrow 0} x^3(1 - (1 - x/3 + o(x)))$
 $\sim_{x \rightarrow 0} x^4/3.$

Exo 10 : **a)** On a $x - \sin x =_{x \rightarrow 0} x - (x - x^3/6 + o(x^3)) \sim_{x \rightarrow 0} x^3/6.$

Et $\text{sh }^3 x \sim_{x \rightarrow 0} x^3.$

$$\text{Donc } \frac{x - \sin x}{\text{sh }^3 x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/6}{x^3} \rightarrow \frac{1}{6}$$

b) On pose $x = \frac{1}{h}$ pour $h \rightarrow 0^+.$

$$\text{On a } f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{h}(1+h)^{1/h} - \frac{e}{h^2} \ln(1+h)$$

$$=_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \exp \left[\frac{1}{h} \ln(1+h) \right] - \frac{e}{h^2}(h - h^2/2 + o(h^2))$$

$$=_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \exp(1 - h/2 + o(h)) - \frac{e}{h} + \frac{e}{2} + o(1)$$

$$=_{h \rightarrow 0} \frac{e(1 - h/2 + o(h))}{h} - \frac{e}{h} + \frac{e}{2} + o(1) = o(1).$$

Donc $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0.$

c) On pose $x = \pi/2 + h$ avec $h \rightarrow 0.$

$$\begin{aligned}
\text{On a } g(x) &= \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln \sin x} \\
&= \frac{2}{\sin^2 h} + \frac{1}{\ln \cos h} \\
&= \frac{2 \ln \cos h - \sin^2 h}{\sin^2 h \ln \cos h}. \\
\text{Or } \ln \cos h &=_{h \rightarrow 0} \ln(1 - h^2/2 + h^4/24 + o(h^4)) \\
&=_{h \rightarrow 0} (h^2/2 - h^4/24) + (h^2/2)^2 + o(h^4) \\
&=_{h \rightarrow 0} h^2/2 + 5h^4/24 + o(h^4) \\
\text{Et } \sin^2 h &=_{h \rightarrow 0} (h - h^3/6 + o(h^3))^2 \\
&= h^2 - h^4/3 + o(h^4). \\
\text{Donc } 2 \ln \cos h - \sin^2 h &\sim_{h \rightarrow 0} 3/4 h^4 \\
\text{puis } g(\pi/2 + h) &\sim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^4/4}{h^2 h^2/2} \rightarrow \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

19.4 Avec recherche d'idées

Exo 11 : a) On a $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$.

En partant de $\tan x =_{x \rightarrow 0} x + x^3/3 + 2x^5/15 + o(x^6)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &=_{x \rightarrow 0} 1 + (x + x^3/3 + 2x^5/15)^2 + o(x^6) \\
&=_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 + 2x^4/3 + (1/9 + 4/15)x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

Puis en primitivant on trouve :

$$\tan x =_{x \rightarrow 0} x + x^3/3 + 2x^5/15 + 11x^7/315 + o(x^7).$$

b) De même la formule $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x)$ et $\text{th } x \sim_{x \rightarrow 0} x$.

$$\text{On trouve } \text{th}'(x) =_{x \rightarrow 0} 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$\text{donc } \text{th}(x) =_{x \rightarrow 0} x - x^3/3 + o(x^3).$$

En trois étapes on abouti à :

$$\text{th}(x) =_{x \rightarrow 0} x - x^3/3 + 2x^5/15 - 11x^7/315 + o(x^7).$$

Exo 12 : On réalise le développement limité de : $\frac{a + bx^2}{1 + cx^2}$

$$\begin{aligned}
&=_{x \rightarrow 0} (a + bx^2)(1 - cx^2 + c^2x^4 - c^3x^6 + o(x^6)) \\
&=_{x \rightarrow 0} a + (b - ac)x^2 + (ac^2 - bc)x^4 + (bc^2 - ac^3)x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

$$\text{Donc l'ordre est maximal lorsque } \begin{cases} a &= 1 \\ b - ac &= -1/2 \\ ac^2 - bc &= 1/24 \end{cases}$$

On obtient $a = 1, b = -5/12$ et $c = 1/2$.

$$\text{Dans ce cas, } f(x) \sim_{x \rightarrow 0} (bc^2 - ac^3)x^6 = \frac{-x^6}{288}.$$

Exo 13 : La fonction f est de classe C^∞ par opération sur $] - 1, +\infty[$.

Pour $x > -1$, on a $f'(x) = (x + 1)e^x > 0$.

Donc f est strictement croissante et continue donc elle réalise une bijection de $] - 1, +\infty[$

vers $f(] - 1, +\infty[) =] - 1/e, +\infty[$.

De plus f est C^∞ , f' ne s'annule pas et f est bijective.

Donc f^{-1} est C^∞ sur $] - 1/e, +\infty[$.

On a $f^{-1}(0) = 0$ car $f(0) = 0$.

Puis $f(x) =_{x \rightarrow 0} x + x^2 + o(x^2)$

et $f^{-1}(y) =_{y \rightarrow 0} 0 + ay + by^2 + o(y^2)$

doivent vérifier $f^{-1}(f(x)) = x$.

$$\text{Donc } f^{-1}(f(x)) = a(x + x^2) + b(x + x^2)^2 + o(x^2) = ax + (a + b)x^2 + o(x^2) = x.$$

Par unicité du développement limité, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

Exo 14 : a) On a f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{-(1-x)^2}{1+x^2} < 0$.

Donc f est continue et strictement décroissante. D'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En effet $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

b) On a $f(x) = \ln(1+x^2) - x =_{x \rightarrow 0} (x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)) - x$
 $=_{x \rightarrow 0} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$.

c) La fonction f est de classe C^∞ et f' ne s'annule pas au voisinage de 0 donc f^{-1} est également de classe C^∞ au voisinage de $f(0) = 0$. D'après la formule de Taylor-Young, il existe un DL $f^{-1}(y) =_{y \rightarrow 0} ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + o(y^4)$.

On obtient $x = f^{-1}(f(x))$
 $=_{x \rightarrow 0} a(-x + x^2 - x^4/2) + b(-x + x^2)^2 + c(-x + x^2)^3 + d(-x)^4 + o(x^4)$
 $=_{x \rightarrow 0} -ax + (a+b)x^2 + (-c-2b)x^3 + (-a/2 + b + 3c + d)x^4 + o(x^4)$
 Donc $a = -1$, $b = 1$, $c = -2$ et $d = \frac{9}{2}$.

Exo 15 : a) On a $f(x) = o(x^2)$ car $\frac{f(x)}{x^2} = x \sin(1/x) \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$. Donc f admet un $DL_2(0)$.

Si par l'absurde, f admet un $DL_3(0)$ alors $f(x) = cx^3 + o(x^3)$ car on peut le tronquer en $f(x) = 0 + o(x^2)$.

Donc $\frac{f(x)}{x^3} \rightarrow_{x \rightarrow 0} c$. Or $\frac{f(x)}{x^3} = \sin(1/x)$ n'admet pas de limite en 0. Absurde.

b) On a $f(x) =_{x \rightarrow 0} 0 + 0x + o(x)$. Donc f se prolonge de classe C^1 en 0 avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

c) Soit $x \neq 0$. On a $f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)$.

Donc $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x) \sim_{x \rightarrow 0} -\cos(1/x)$ n'admet pas de limite.

Donc f' n'est pas dérivable en 0.

Ainsi f n'est pas prolongeable de classe C^2 malgré l'existence d'un $DL_2(0)$.

19.5 Problèmes

Exo 16 : a) On a $\text{Arctan } \sqrt{x} =_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} (\sqrt{x})^{2k+1} + o(\sqrt{x}^{2n+2})$

$=_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^k + o(x^{n+1})$

Donc $f(x) =_{x \rightarrow 0} (1+x) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^k + o(x^n)$ est un $DL_n(0)$.

b) A l'ordre 1 on trouve : $f(x) =_{x \rightarrow 0} (1+x)(1-x/3) + o(x) = 1 + \frac{2}{3}x + o(x)$.

Donc f est prolongeable de classe C^1 en posant $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{2}{3}$.

c) On pose $g(x) = \frac{1+x^2}{x} \text{Arctan}(x)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

On a $g'(x) = (\frac{-1}{x^2} + 1) \text{Arctan}(x) + \frac{1+x^2}{x} \frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{(x^2-1)\text{Arctan}(x) + x}{x^2}$
 $= \frac{x^2-1}{x^2} (\text{Arctan}(x) + \frac{x}{x^2-1})$.

Puis on étudie $h(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \frac{x}{x^2 - 1}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(x^2-1) - 2x^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 + 2x^2 + 1)}{(1+x^2)(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-4x^2}{(1+x^2)(x^2-1)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Donc h est décroissante avec $h(0) = 0$, $\lim_{1^-} h = -\infty$, $\lim_{1^+} h = +\infty$ et $\lim_{+\infty} h = \pi/2$.

Donc $h < 0$ sur $]0, 1[$ et $h > 0$ sur $]1, +\infty[$.

Puis $g' > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc g croissante.

Puis $f(x) = g(\sqrt{x})$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d) On pose $h = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a } f(1/h^2) &= \frac{1 + (1/h)^2}{(1/h)} \operatorname{Arctan}(1/h) \\ &= \frac{1+h^2}{h} (\pi/2 - \operatorname{Arctan}(h)) \text{ car } \tan(\pi/2 - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \\ &=_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} + h \right) (\pi/2 - h + o(h)) \\ &=_{h \rightarrow 0} \frac{\pi}{2h} - 1 + \frac{\pi}{2}h + o(h). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) =_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \sqrt{x} - 1 + \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Exo 17 : a) f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $f'_n(x) = e^x + 2x - n$ et $f''_n(x) = e^x + 2 > 0$.

Donc f'_n est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f'_n(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[$ en calculant les limites.

Donc il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f'_n(x_n) = 0$.

Pour $x < x_n$, $f'_n(x) < f'_n(x_n) = 0$ donc f_n est strictement décroissante sur $] -\infty, x_n[$ et de même f_n est strictement croissante sur $]x_n, +\infty[$. Donc f_n atteint en x_n un minimum global égale à $\mu_n = f_n(x_n)$.

b) Puis $f'_n(\ln n) = e^{\ln n} + 2 \ln n - n = 2 \ln n > 0 = f'_n(x_n)$ donc $x_n < \ln n$.

On a $f'_n(x_n) = 0$ donc $e^{x_n} + 2x_n - n = 0$

$$\text{puis } x_n = \ln(n - 2x_n) = \ln n + \ln\left(1 - 2\frac{x_n}{n}\right)$$

$$=_{+\infty} \ln n - \frac{x_n}{n} + o(x_n/n) \text{ car } 0 \leq x_n/n < \ln n/n \rightarrow 0.$$

Donc $x_n \sim_{+\infty} \ln n$.

c) On a $\mu_n = f_n(x_n) = e^{x_n} + x_n^2 - nx_n$
 $=_{+\infty} e^{\ln n + o(\ln n)} + (\ln n + o(\ln n))^2 - n(\ln n + o(\ln n))$
 $=_{+\infty} ne^{o(1)} + (\ln^2 n + o(\ln^2 n)) - n \ln n + o(n \ln n)$
 $=_{+\infty} (n + o(n)) + (\ln^2 n + o(\ln^2 n)) - (n \ln n + o(n \ln n))$
 $\sim_{+\infty} -n \ln$ par croissance comparée.