TD 13 : Les polynômes

13.1 Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$

Exo 1 : Réponse :

On note $A = BQ + R$ le résultat des divisions euclidiennes.

a) $Q = 3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et $R = -41X - 47$.
b) $Q = 3X^2 + 2X - 3$ et $R = -9X^2 - X + 7$.
c) $Q = X^2 + X - 2$ et $R = -7X + 6$.
d) $Q = X^3 - 2X^2 - 14X - 63$ et $R = 261 - 268X$.

Exo 2 : Indication :

On peut appliquer l'algorithme d'Euclide.

Réponse :

a) $PGCD = X - 2$
b) $PGCD = 1$
c) $PGCD = X^3 + 1$
d) $PGCD = (X - 1)^2$.

13.2 Multiplicité des racines

Exo 3 : Indication :

La multiplicité est par définition le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \alpha)^m | P(X)$.
Dans la pratique, on utilise plutôt la caractérisation par l'annulation des dérivées :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Réponse :

a) On a $\text{mult}_1 P = 3$ car $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$.
b) On a $\text{mult}_2 P = 4$ car $P(2) = P'(2) = P''(2) = P^{(3)}(2) = 0$ et $P^{(4)}(2) \neq 0$.

Exo 4 : Solution :

Par l'absurde, on introduit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine au moins double. On a donc $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.
Or $P'(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$.
Donc $P(\alpha) - P'(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} = 0$. Puis $\alpha^n = 0$ donc $\alpha = 0$.
Absurde car $P(0) = 1$ et 0 n'est pas une racine.

Exo 5 : Indication :

Les racines doubles sont solutions de $P(z) = P'(z) = 0$.
On recherche les racines de P' qui ne dépendent pas de a. On réalise la synthèse en vérifiant si c'est également une racine de P.

Solution :

On recherche les racines de $P' = 7(X + 1)^6 - 7X^6$.
Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a $P'(z) = 0$ ssi $(z + 1)^6 = z^6$
ssi $\frac{z+1}{z} \in \mathbb{U}_6$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6, z + 1 = \omega z$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6 - \{1\}, z = \frac{1}{\omega - 1}$.

Donc P admet une racine double si il existe $\omega \in \mathbb{U}_6 - \{1\}$ tel que $P\left(\frac{1}{\omega-1}\right) = 0$
ssi $a = (z + 1)^7 - z^7 = z^6[(z + 1) - z]$ car $(z + 1)^6 = z^6$

ssi $a = z^6 = \frac{1}{(\omega-1)^6} = \left(\frac{1}{e^{2ik\pi/6}-1}\right)^6 = \left(\frac{e^{-ik\pi/6}}{2i\sin(k\pi/6)}\right)^6$
$= \frac{(-1)^k}{-64\sin^6(k\pi/6)}$ pour $k \in [\![1,5]\!]$.
Donc les solutions sont $a \in \left\{1, \frac{-1}{27}, \frac{1}{64}\right\}$.

Exo 6 : **Réponse :**

On calcul l'ordre d'annulation des dérivées $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) = (n+1)n \neq 0$. Donc $\text{mult}_1 P = 2$.

13.3 Equation polynomiales

Exo 7 : **Indication :**

On commence par déterminer le degré du polynôme solution avant de déterminer ses coefficients. On peut l'écrire $P = aX^n + Q$ avec $a \neq 0$ le coefficient dominant,$n \in \mathbb{N}$ le degré et Q de degré strictement inférieur à n.

Solution :

a) On écrit $P = aX^n + Q$ avec $a \neq 0$ le coefficient dominant,$n \in \mathbb{N}$ le degré et Q de degré strictement inférieur à n.

On a $P' + XP = aX^n + Q + anX^n + XQ' = a(n+1)X^n + Q + XQ'$. On sait que $a(n+1) \neq 0$. Donc en identifiant les plus haut degré, on a $n = 2$ et $a(n+1) = 1$. Ainsi $a = \frac{1}{3}$ et en posant $Q = bX + c$, on trouve :
$(1/3X^2 + bX + c) + X(2/3X + b) = X^2 + 2bX + c$. Donc $b = 0$ et $c = 1$.

Donc l'unique solution polynomiale est $P = \frac{1}{3}X^2 + 1$.

b) De la même manière, on écrit $P = aX^n + Q$.
On a $X^2P'' + 2XP' - 2P = [an(n-1)X^n + X^2Q''] + 2[anX^n + XQ'] - 2[aX^n + Q]$
$= a[n(n-1) + 2n - 2]X^n + [X^2Q'' + 2XQ' - 2Q]$.
Donc on a $n(n-1) + 2n - 2 = 0$ càd $n^2 + n - 2 = 0$ puis $n \in \{1, -2\}$
. Ainsi $n = 1$ et $P = aX + b$.
L'équation s'écrit alors $0 + 2Xa - 2aX - 2b = 0$ d'où $b = 0$.

Donc les polynômes $P = aX$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ sont les solutions polynomiales de l'équation.

Exo 8 : **Indication :**

On peut raisonner avec le polynôme $Q(X) = P(X) - 1$ qui admet plusieurs racines connues. Autre méthode, on peut introduire les coefficients de P et résoudre le système linéaire à 4 inconnues et 4 équations.

Solution :

On sait que 0 est une racine au moins double et 1 est une racine de $P(X) - 1$.
Donc $P(X) - 1 = aX^2(X-1)$ avec $a \in \mathbb{C}$ car P est de degré au plus 3.
Puis $P'(X) = a[3X^2 - 2X]$ et $P'(1) = -1$ donne $a = -1$.
Ainsi $P(X) = -X^2(X-1) + 1 = -X^3 + X^2 + 1$.

13.4 Factorisation des polynômes

Exo 9 : **Indication :**

Pour factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}[X]$, on utilise la méthode suivante :

1. On recherche les racines complexes, $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$.
2. On détermine leurs multiplicités. Deux cas se produisent :
   - Si on a trouver n racines d'un polynôme de degré n alors les racines sont simples.
   - Sinon il existe une racine multiple, on regarde si $P'(z) = 0$.
3. On en déduit la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$, $P(X) = a_n \prod (X-z)^{m_z}$. Puis la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ en regroupant les conjugués avec $\boxed{(X-z)(X-\bar{z}) = X^2 - 2\text{Re}(z)X + |z|^2}$.

Solution :

a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $P(z) = 0$ ssi $z^6 = -1 = e^{i\pi}$ ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6, z = \omega e^{i\pi/6}$.
On a trouvé 6 racines distincts d'un polynôme de degré 6 donc elles sont simples.
Donc $X^6 + 1 = (X - i)(X + i)(X - e^{i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{-5i\pi/6})$
$= (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$

b) Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. On a $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \sum_{k=0}^{5} z^k = \frac{z^6-1}{z-1}$.
Donc $P(z) = 0$ ssi ($z^6 = 1$ et $z \neq 1$) ssi $z \in \mathbb{U}_6 - \{1\}$.
On a trouvé 6 racines distincts d'un polynôme de degré 6 donc elles sont simples.
On a $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2)$
$= (X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$

c) On peut remarquer que 1 est une racine de $P(X) = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$.
Puis $P(X) = (X - 1)(X^2 - X + 1) = (X - 1)(X + j)(X + j^2)$.
Ainsi $P(X) = (X - 1)(X^2 - X + 1)$ est la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$.

d) On peut remarquer que 2 est racine de $P(X) = X^3 - X^2 - 8X + 12$.
On calcul $P(2) = P'(2) = 0$ et $P''(2) = 10 \neq 0$. Donc 2 est racine double.
Donc $P(X) = (X - 2)^2(X + 3)$ en factorisant.

e) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a $(z^2 - 3z + 2)^2 + z^2 = 0$ ssi $\left(\frac{z^2-3z+2}{z}\right)^2 = -1 = i^2$
ssi $z^2 - 3z + 2 = iz$ ou $z^2 - 3z + 2 = -iz$
ssi $z^2 - (3 + i)z + 2 = 0$ ou $z^2 - (3 - i)z + 2 = 0$
Le discriminant de la première équation est $\Delta = (3 + i)^2 - 8 = 6i = 6e^{i\pi/2}$.
Donc $\delta = \sqrt{6}e^{i\pi/4} = \sqrt{3}(1 + i)$ convient.
Puis les racines sont $z_1 = \frac{3+i+\sqrt{3}(1+i)}{2}$ et $z_2 = \frac{3+i-\sqrt{3}(1+i)}{2}$. Leurs conjugués sont les racines de la seconde équation $z^2 - (3 - i)z + 2 = 0$.
On a trouvé 4 racines distincts d'un polynôme de degré 4 donc elles sont simples.
On a $(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2 = (X - z_1)(X - z_2)(X - \bar{z_1})(X - \bar{z_2})$
$= (X^2 - (3 + \sqrt{3})X + 4 + 2\sqrt{3})(X^2 - (3 - \sqrt{3})X + 4 - 2\sqrt{3})$.
En effet $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $|z_1|^2 = \frac{1}{4}\left((3 + \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2\right) = 4 + 2\sqrt{3}$.
Et $\mathrm{Re}(z_2) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ et $|z_2|^2 = \frac{1}{4}\left((3 - \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2\right) = 4 - 2\sqrt{3}$.

f) Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $z^8 + z^4 + 1 = \frac{z^{12}-1}{z^4-1}$. D'où $z \in \mathbb{U}_{12} - \mathbb{U}_4$
Donc on a trouvé 8 racines d'un polynôme de degré 8.
Puis $X^8 + X^4 + 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_{12} - \mathbb{U}_4} (X - \omega)$
$= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$

g) Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $z^6 - z^3 + 1 = \frac{z^9+1}{z^3+1}$. D'où $z = e^{i\pi/9}e^{2ik\pi/9}$ pour $k \in \{0, 2, 3, 5, 6, 8\}$.
Donc on a trouvé 6 racines d'un polynôme de degré 6.
On a $X^6 - X^3 + 1$
$= (X - e^{i\pi/9})(X - e^{-i\pi/9})(X - e^{5i\pi/9})(X - e^{-5i\pi/9})(X - e^{11i\pi/9})(X - e^{-11i\pi/9})$
$= (X^2 - 2\cos(\pi/9)X + 1)(X^2 - 2\cos(5\pi/9)X + 1)(X^2 - 2\cos(11\pi/9)X + 1)$

h) Soit $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$.
On a $(z + 1)^6 + (z - 1)^6 = 0$
ssi $\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = -1 = e^{i\pi}$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6, \frac{z-1}{z+1} = e^{i\pi/6}\omega$
ssi $\exists \omega \in \mathbb{U}_6, z = \frac{e^{i\pi/6}\omega-1}{e^{i\pi/6}\omega+1} = i\tan\left(\frac{(2k+1)\pi}{12}\right)$ avec l'arc moitié.
On a donc trouvé 6 racines simples du polynôme.
Le coefficient dominant est 2.
Puis $(X + 1)^6 + (X - 1)^6$
$= 2(X + i/\tan(\pi/12))(X - i/\tan(\pi/12))(X - i/\tan(\pi/4))$
$\times(X + i/\tan(\pi/4))(X - i/\tan(5\pi/12))(X + i/\tan(5\pi/12))$

$= 2(X^2 + \tan^2(\pi/12))(X^2+1)(X^2+\tan^2(\pi/12))$.

Exo 10 : **Indication :**

Si le polynôme admet une racine réelle alors on peut décomposer $P(X) = R(X) + iI(X)$ avec $R, I \in \mathbb{R}[X]$. Une racine réelle de P est alors une racine commune de R et I. On peut calculer leur PGCD, ou factoriser celui de plus bas degré.

Solution :

a) On a $P(X) = 2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX + (1-3i)$
$= (2X^3 - 5X^2 + 1) - i(6X^2 - 9X + 3)$
$= R(X) - iI(X)$.
Or $I(X) = 6X^2 - 9X + 3 = 3(2X-1)(X-1)$.
On vérifie si $1/2$ ou/et 1 sont des racines de $R(X)$.
On a $R(1) = -2$ et $R(1/2) = 0$. Puis $R(X) = (2X-1)(X^2-2X-1)$.
Donc $P(X) = (2X-1)[X^2 - 2X - 1 - i(X-1)] = (2X-1)[X^2 - (2+i)X + (i-1)]$.
On a $\Delta = (2+i)^2 - 4(i-1) = 7$. Donc les racines sont $\frac{2+i-\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{2+i+\sqrt{7}}{2}$.

b) On a $P(X) = 6X^4 + X^3 + (6i+10)X^2 + (2+i)X - (4+2i) = R(X) + iI(X)$ avec $R(X) = 6X^4 + X^3 + 10X^2 + 2X - 4$ et $I(X) = 6X^2 + X - 2 = (3X+2)(2X-1)$ de racines $1/2$ et $-2/3$.
Puis $R(-2/3) = R(1/2) = 0$ donc $R(X) = (3X+2)(2X-1)(X^2+2)$.
Donc $P(X) = (3X+2)(2X-1)(X^2+2+i)$.
Pour résoudre $z^2 = -2-i$, on écrit $z = a+ib$.
Il vérifie le système $\begin{cases} a^2 - b^2 & = -2 \\ 2ab & = -1 \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{5} \end{cases}$
Donc $a^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2}$ et $b^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{2}$ avec $ab < 0$.
$P(X) = (3X+2)(2X-1)\left(X - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)$.

13.5 Avec recherche d'idées

Exo 11 : On note $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ et $P'(X) = 5X^4 - 2X$ s'annule en 0 et $a = \sqrt[3]{2/5}$.
Puis $P(0) = 1 > 0$ et $P(a) = a^2(a^3-1) + 1 = a^2(2/5 - 1) + 1 = 3/5a^2 + 1 > 0$ sont les extremums locaux de la fonction. Et $\lim_{+\infty} P = +\infty$ et $\lim_{-\infty} P = -\infty$.
Donc d'après les théorème de la bijection continue il existe une unique racine dans l'intervalle $]-\infty, 0[$. Puis aucune dans les intervalles $]0, a[$ et $]a, +\infty[$.
Par l'absurde, on note $\alpha = -p/q$ la racine supposée rationnelle. On peut supposer p et q premiers entre eux. Donc $P(\alpha) = -p^5/q^5 + p^2/q^2 + 1 = 0$ donne $-p^5 + p^2q^3 + q^5 = 0$.
Donc q divise $q^5 + p^2q^3 = p^5$. Puis un facteur premier qui divise q divise p. Donc $q = 1$ car $pgcd(q,p) = 1$ et ainsi $\alpha = -p$ est un entier.
Or $P(-1) = -1 < 0$ donc $\alpha \in]-1, 0[$ d'après les variations de la fonction.
Ainsi un entier $\alpha \in]-1, 0[$ est Absurde.

Exo 12 : A l'aide de la formule du binôme de Newton :
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$
$= (1-X)^n \left(3X + (1-X)^2\right)^n$
$= (1-X)^n (X^2 + X + 1)^n$
$= (-1)^n (X-1)^n (X-j)^n (X-j^2)^n$.
Donc les racines sont $1, j$ et j^2 et elles sont de multiplicité n.

Exo 13 : Soit a une racine de P' alors a est racine de P car $(X-a)|P'(X)|P(X)$.
De plus $\text{mult}_a P = \text{mult}_a P' + 1$.

Or P et P' sont scindés sur $\mathbb{C}$.
Donc $\deg(P') = \sum_{P'(a)=0} \text{mult}_a P' = \sum_{P'(a)=0}(\text{mult}_a P - 1) \leq \deg(P) - N$.
avec N le nombre de racines de P'. Or $\deg(P') = \deg P - 1$ donc $N \leq 1$.
Si $N = 0$ alors P' est constant et $P(X) = \alpha(X - a)$.
Si $N = 1$ alors $P' = \alpha(X - a)^n$ puis $P = \frac{\alpha}{n+1}(X - a)^{n+1}$.
Dans tous les cas P admet une unique racine et $P(X) = c(X - a)^m$ avec $c \in \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{N}$.

Exo 14 : On raisonne par double implications.
($\Leftarrow$) On suppose que $b = aq$ avec $q \in \mathbb{N}^*$.
Alors $X^b - 1 = (X^a)^q - 1^q = (X^a - 1)\sum_{k=0}^{q-1} X^{ak}$ est un multiple de $X^a - 1$.
($\Rightarrow$) On suppose que que $X^b - 1 | X^a - 1$.
Alors $\omega = e^{2i\pi/b}$, qui est une racine de $X^b - 1$, est une racine de $X^a - 1$.
Ainsi $\omega^a - 1 = 0$ c'est à dire $e^{2ia\pi/b} = 1$ donc $2i\pi a/b \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
Puis $a/b \in \mathbb{Z}$ i.e. $b|a$.

13.6 Problèmes

Exo 15 : **<u>Indication</u> :**
a) et b) On peut raisonner par récurrence double.
c) On résout l'équation trigonométrique $\cos(n\theta) = 0$ pour en déduire les racines $\alpha = \cos\theta$.
d) On utilise les relations coefficients/racines $\boxed{\prod_{P(\alpha)=0} \alpha^{m_\alpha} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}}$.

<u>Solution</u> :

a) On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que P_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.
<u>Initialisation</u> $n = 1$ on a $P_1 = X$ est de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$.
$n = 2$ on a $P_2 = 2X^2 - 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^1$.
<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n = 2^{n-1}X^n + R_n$ et $P_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R_{n+1}$ avec $\deg(R_n) < n$ et $\deg(R_{n+1}) < n + 1$.
Donc $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n = 2^{n+1}X^{n+2} + 2XR_{n+1} - P_n$ avec $R_{n+2} = 2XR_{n+1} - P_n$ de degré strictement plus petit que $n + 2$.
Donc P_{n+2} est de degré $n + 2$ et de coefficient dominant 2^{n+1}

b) On montre que $P_n(\cos x) = \cos(nx)$ par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
<u>Initialisation</u> $n = 0$ On a $P_0(\cos x) = 1$ et $\cos(0x) = 1$.
$n = 1$ On a $P_1(\cos x) = \cos x = \cos(1.x)$.
<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n(\cos x) = \cos(nx)$ et $P_{n+1}(\cos x) = \cos((n + 1)x)$.
Donc $P_{n+2}(\cos x) = 2\cos x P_{n+1}(\cos x) - P_n(\cos x) = 2\cos x\cos((n+1)x) - \cos nx$ par HR.
Or $2\cos((n+1)x)\cos(x) = \cos[(n+1)x+x]+\cos[(n+1)x-x] = \cos((n+2)x)+\cos(nx)$.
Donc $P_{n+2}(\cos x) = \cos((n + 2)x) + \cos(nx) - \cos(nx) = \cos((n + 2)x)$.

c) On a $\cos(nx) = 0$ ssi $nx \equiv \pi/2[\pi]$ ssi $x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in llbracket0, n - 1]\!]$.
Donc $P_n(\cos x) = 0$ pour ces valeurs et $\alpha_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont des racines de P_n.
Ces nombres sont 2 à 2 distincts et il y en a n le degré de P_n.
Donc ce sont toutes les racines de P_n et elles sont simples.
En particulier $P_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n}(X - \alpha_n)$.

d) Le produit des racines est donné par le coefficient constant $c_n = P_n(0)$.
On a $c_0 = 1, c_1 = 0$ et $c_{n+2} = 2.0.c_{n+1} - c_n = -c_n$ par la récurrence de l'énoncé.
Donc $c_{2k} = (-1)^k$ et $c_{2k+1} = 0$.
Puis $p_n = \prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = (-1)^n\frac{c_n}{2^{n-1}}$.
Donc $p_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}$ et $p_{2k+1} = 0$.

Exo 16 : **Indication :**

d) On peut raisonner par récurrence simple. Le théorème de Rolle permet de démontrer que si P s'annule n fois entre $]-1,1[$ alors P' s'annule $n-1$ fois entre $]-1,1[$. Ceci montre que la dérivée à une racine de moins alors que notre récurrence veut une racine de plus. On sait que $Q_n^{(k)}$ s'annule k fois par hypothèse de récurrence et 2 fois de plus (en $x=1$ et $x=-1$) d'après le c). C'est à dire $Q_n^{(k)}$ s'annule $k+2$ fois, on peut donc démontrer que $Q_n^{(k+1)}$ s'annulent $k+1$ fois.

f) On applique la formule de Leibniz à l'ordre $n+1$ $\boxed{(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}}$

Solution :

a) On obtient $P_1(X) = 2X$, $P_2(X) = 12X^2 - 4$ et $P_3(X) = 120X^3 - 72X$.

b) On a $\deg Q_n = \deg(X^2-1)^n = n\deg(X^2-1) = 2n$. Puis P_n est la dérivée n-ième, donc $\deg P_n = \deg Q_n - n = n$.

c) On a $Q_n(X) = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ donc par divisibilité les racines sont 1 et -1 et de multiplicité n.

d) On démontre le résultat par récurrence pour $k=0$. On a $Q_n^{(0)} = Q_n$ n'a aucune racine dans $]-1,1[$. Puis si pour $0 \leq k < n, Q_n^{(k)}$ admet exactement k racines : $-1 < x_1 < ... < x_k < 1$. Or on sait de plus que 1 et -1 sont racines de $Q_n^{(k)}$ de multiplicité $n-k$. Donc le théorème de Rolle, la dérivée de $Q_n^{(k)}$ admet des racines entre chacune de ces racines : il existe donc $-1 < y_1 < x_1 < y_2 < ... < x_k < y_{k+1} < 1$ tel que $Q_n^{(k+1)}(y_j) = 0$. Ceci constitue $k+1$ racines de $Q_n^{(k+1)}$. Puis $\deg(Q_n^{(k+1)}) = 2n-(k+1) \geq \sum_{\alpha \text{ racine}} mult_\alpha(Q_n^{(k+1)}) \geq mult_1(Q_n^{(k+1)}) + mult_{-1}(Q_n^{(k+1)}) + k + 1 = (n-k-1)+(n-k-1)+k+1 = 2n-(k+1)$. Donc on a égalité et il n'y a donc pas d'autres racines que $-1 < y_1 < ... < y_{k+1} < 1$. C'est à dire exactement $(k+1)$ racines distinctes dans $]-1,1[$.

e) On dispose ainsi de n racines réelles distinctes $-1 < a_1 < ... < a_n < 1$ d'un polynôme de degré n d'où $P(X) = \lambda(X-a_1)...(X-a_n)$ est scindé à racines simples.

f) On a :$P_{n+1}(X) = \left((X^2-1)Q_n\right)^{(n+1)}$
$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (X^2-1)^{(k)} Q_n^{(n-k)}$
$= (X^2-1)Q_n^{(n+1)} + (n+1)(2X)Q_n^{(n)} + \frac{(n+1)n}{2} 2Q_n^{(n-1)}$
$= (X^2-1)P_n'(X) + 2X(n+1)P_n(X) + n(n+1)Q_n^{(n-1)}$.

g) On montre par récurrence que $P_n(1) = 2^n n!$. On a $P_1(1) = 2$, $P_2(1) = 8$ et $P_3(1) = 48$. La formule de la question précédente se simplifie car 1 et -1 sont racines de X^2-1 et $Q_n^{(n-1)}$. Donc $P_{n+1}(1) = 2(n+1)P_n(1) = 2(n+1)2^n n! = 2^{n+1}n!$.
De même, on obtient $P_n(-1) = (-1)^n 2^{n+1} n!$ (ou par parité des fonctions P_n).