TD 13 : Les polynômes

13.1 Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 ($\star$) Effectuer la division euclidienne de A par B :

a) $A = 3X^5 + 4X^2 + 1, B = X^2 + 2X + 3,$
b) $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1, B = X^3 + X + 2,$
c) $A = X^4 - X^3 + X - 2, B = X^2 - 2X + 4,$
d) $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9, B = X^2 - 5X + 4.$

Exercice 2 ($\star$) Déterminer les PGCD des polynômes suivants :

a) $X^3 - X^2 - X - 2$ et $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2,$
b) $X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $X^3 + X + 1,$
c) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2,$
d) $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $X^n - nX + n - 1\,(n \in \mathbb{N}^*).$

13.2 Multiplicité des racines

Exercice 3 ($\star$) Calculer l'ordre de multiplicité de α comme racine de P :

a) $P = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5$ et $\alpha = 1.$
b) $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$ et $\alpha = 2.$

Exercice 4 ($\star$) Montrer que $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ admet que des racines simples.
Exercice 5 ($\star\star$) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ possède une racine double.
Exercice 6 ($\star$) Calculer l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de $X^{n+1} - (n+1)X + n.$

13.3 Equation polynomiales

Exercice 7 ($\star\star$) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

a) $P' + XP = X^2 + 1$ **b)** $X^2P'' + 2XP' - 2P = 0$

Exercice 8 ($\star$) Déterminer les polynômes P de degré au plus 3 vérifiant :

$$P(0) = P(1) = 1, P'(0) = 0 \text{ et } P'(1) = -1.$$

13.4 Factorisation des polynômes

Exercice 9 ($\star$) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

a) $X^6 + 1$
b) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
c) $X^3 - 2X^2 + 2X - 1$
d) $X^3 - X^2 - 8X + 12$ (racine double)
e) $(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2$
f) $X^8 + X^4 + 1$
g) $X^6 - X^3 + 1$
h) $(X+1)^6 + (X-1)^6.$

Exercice 10 ($\star$) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX + (1-3i) \text{ qui possède une racine réelle,}$$

$$6X^4 + X^3 + (6i+10)X^2 + (2+i)X - (4+2i) \text{ qui possède deux racines réelles.}$$

13.5 Avec recherche d'idées

Exercice 11 ($\star\star$) Montrer que $X^5 - X^2 + 1$ possède une unique racine réelle.
Montrer qu'elle est irrationnelle.
Exercice 12 ($\star$) Quelles sont les racines de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$?
Exercice 13 ($\star\star$) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P' divise P.
Exercice 14 ($\star\star$) Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^a - 1$ divise $X^b - 1$ ssi a divise b.

13.6 Problèmes

Exercice 15 ($\star\star$) (Polynôme de Tchebychev) On considère la suite (P_n) de polynômes définie par

$$P_0 = 1, P_1 = X \text{ et } P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P_n(\cos x) = \cos(nx)$.
c) En déduire les racines de P_n.
d) En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Exercice 16 ($\star\star$) Pour $n \geq 1$, on définit $Q_n(X) = (X^2-1)^n$ et $P_n = Q_n^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

a) Calculer P_1, P_2 et P_3.
b) Calculer le degré de Q_n et en déduire celui de P_n.
c) Déterminer les multiplicités des racines de Q_n.
d) En utilisant le théorème de Rolle, démontrer que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $Q_n^{(k)}$ admet exactement k racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$.
e) En déduire que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
f) En utilisant la formule de Leibniz sur le produit $Q_{n+1} = (X^2-1)Q_n$, démontrer que :

$$P_{n+1} = (X^2-1)P_n' + 2X(n+1)P_n + n(n+1)Q_n^{(n-1)}.$$

g) En déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.