TD 18 : Les Déterminants

Exercice 1 ($\star$) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. On définit :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ et } P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}.$$

a) Calculer sous forme factorisée, le déterminant D_1.
b) Montrer que P est un polynôme dont on précisera le degré et les coefficients.
c) Déterminer les racines de P et en déduire les valeurs de D_2 et D_3.

Exercice 2 ($\star$) Déterminer l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Exercice 3 ($\star\star$) Soit $P_n(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & & 0 \\ 1 & -x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -x \end{vmatrix}$ un polynôme de degré n.

a) Trouver une relation de récurrence entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2} pour $n \geq 3$.
b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Trouver une base de deux vecteurs du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + \lambda u_{n+1} + u_n = 0.$$

c) En considérer la suite $P_n(\lambda)$. Trouver les racines de P_n.

Exercice 4 ($\star\star$) Soient $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ des scalaires. Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 5 ($\star$) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ des scalaires. Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & b & \dots & b \\ a & c & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} c & b & & 0 \\ a & c & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a & c \end{vmatrix}.$$

Exercice 6 ($\star$) Ecrire sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \tan(a/2) \\ 1 & \cos(b) & \tan(b/2) \\ 1 & \cos(c) & \tan(c/2) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos(c) & \cos(b) \\ \cos(c) & 1 & \cos(a) \\ \cos(b) & \cos(a) & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & 2a & 2b \\ a^3 & b^3 & 3a^2 & 3b^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x & b \\ 1 & a & b & x \\ 1 & b & a & x \\ 1 & x & x & a \end{vmatrix}$$