TD 14 : Espace vectoriel

14.1 Sous-espace vectoriel

Exercice 1 ($\star$) Montrer que $F = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 12u_{n+1} - 36u_n\}$ est un espace vectoriel avec deux méthodes.

Exercice 2 ($\star$) Montrer que $F = \{y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0\}$ est un espace vectoriel avec deux méthodes.

Exercice 3 ($\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AM = MA\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 4 ($\star$) Les parties de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

a) $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que f est monotone$\}$

b) $B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que f s'annule en $0\}$

c) $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que f s'annule$\}$

d) $D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que f est impaire$\}$.

Exercice 5 ($\star$) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes et
$\Delta = \{f - g$ pour $f, g \in \mathcal{C}\}$. Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6 ($\star\star$) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si ($F \subset G$ ou $G \subset F$).

Exercice 7 ($\star\star$) (*Complexifié de E*) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle et de la multiplication externe par les complexes définie, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in E \times E$, par : $(a + ib) \cdot (x, y) = (a \cdot x - b \cdot y, a \cdot y + b \cdot x)$.
Montrer que $E \times E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 8 ($\star$) Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\mathbb{R} \cdot \omega = \{x \cdot \omega$ pour $x \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\mathbb{R} \cdot \omega$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
A quelle condition $\mathbb{R} \cdot \omega$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

14.2 Espaces supplémentaires

Exercice 9 ($\star$) On considère $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y + z = 0 \right\}$ et $D = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 ($\star$) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 ($\star$) Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $f(0) = f'(0) = 0\}$
et $G = \{f : x \mapsto ax + b$ pour $a, b \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 12 ($\star$) Soient $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \right\}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que H et $\operatorname{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 13 ($\star\star$) Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel E.
Montrer que $\operatorname{Vect}(A \cup B) = \operatorname{Vect}(A) + \operatorname{Vect}(B)$.
Comparer $\operatorname{Vect}(A \cap B)$ et $\operatorname{Vect}(A) \cap \operatorname{Vect}(B)$.

Exercice 14 ($\star\star$) Soient F et G deux sous-$\mathbb{K}$-ev d'un $\mathbb{K}$-ev E.
On considère H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G.
Montrer que F et H sont supplémentaires dans $F + G$.

14.3 Famille de vecteurs

Exercice 15 ($\star$) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que u appartienne à $\mathrm{Vect}\,(x, y)$.

Comparer alors $\mathrm{Vect}\,(x, y)$, $\mathrm{Vect}\,(x, u)$ et $\mathrm{Vect}\,(y, u)$.

Exercice 16 ($\star$) Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

a) (x_1, x_2) avec $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 ($\star\star$) On pose $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :
$f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = x\cos x,\ f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x \sin x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 18 ($\star\star$) Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = e^{kx}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 19 ($\star\star$) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \to x^n$. Montrer que $(f_0, ..., f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.