TD 22 : Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1 ($\star$) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.
Soit $f : E \to E$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout $(x, y) \in E^2, dist(f(x), f(y)) = dist(x, y)$.

a) Montrer que pour tout $x \in E, N(f(x)) = N(x)$.

b) En déduire que pour tout $x, y \in E, \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle$.

c) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle f(e_i), \forall x \in E.$$

d) En déduire que f est un automorphisme de E.

Exercice 2 ($\star$) Montrer que pour tout réel x, y et z, on a :

$$|x + 2y + 3z| \leq \sqrt{14}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

et préciser le cas d'égalité.

Exercice 3 ($\star\star$) Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $G = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires.

a) Soit $a \neq 0_E$. Démontrer que $H_a = \{x \in E \text{ tel que } \langle x|a\rangle = 0\}$ est un hyperplan de E.

b) Soit H un hyperplan de E. Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que $H = H_a$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \neq 0_E$ pour que $H_a = H_b$.

d) Pour $a \neq 0_E$, on note $\phi_a(x) = \langle a|x\rangle$, de sorte que $\phi_a \in G$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\phi_a = \phi_b$.

e) En déduire que l'application de E dans G définie par $a \mapsto \phi_a$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 4 ($\star$) Soit p un projecteur sur un espace vectoriel euclidien E. C'est à dire que p est un endomorphisme vérifiant $p \circ p = p$. Démontrer que :

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \Longleftrightarrow \forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$$

Exercice 5 ($\star$) On définit par le système d'équation suivant un sous-espace F de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x + y + -z - t = 0 \\ \quad x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer une base orthonormée de F.

b) Déterminer une base orthonormée de $F^{\perp}$.

c) Ecrire la matrice du projecteur orthogonal sur F dans la base canonique.

d) Déterminer les distances de $(1, 0, 0, 1), (2, 5, 0, 0)$ et $(1, 1, 1, 1)$ à F.

Exercice 6 ($\star\star$) Déterminer $\inf_{x,y,z \in \mathbb{R}} (x + z - 1)^2 + (x - y + 5)^2 + (x + y + 2z - 3)^2$

Exercice 7 ($\star\star$) Déterminer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{\infty} e^{-t}(t^2 - at + b)^2 dt$.

Exercice 8 ($\star$) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $\text{Vect}\,(v_1, v_2)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 ($\star\star$) On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire définit par :

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Vérifier que l'expression définit bien un produit scalaire.

b) Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.