## Probabilité avec du dénombrement

André participe à une course avec 8 autres coureurs. Les trois premiers reçoivent une récompense.

1. Combien y a-t-il de podium possible ?
2. Quelle est la probabilité que André arrive premier ?
3. Quelle est la probabilité que André soit sur le podium ?
4. Il est venu avec son frère. Quelle est la probabilité qu'il reçoivent tous les deux une récompense ?
5. Quelle est la probabilité qu'il arrive devant son frère sachant qu'ils sont tous les deux sur le podium ?

1. On note $C$ l'ensemble des coureurs. On a $\operatorname{Card} C = 9$. On note $a \in C$ pour André.
   On définit $\omega = (c_1, c_2, c_3)$ les trois premiers coureurs.
   On a $\Omega = L_3(C)$ donc $\operatorname{Card}(\Omega) = A_9^3 = 9.8.7 = 504$ podiums possibles.
2. On note $A_1 =$"André arrive premier" $= \{(a, c_2, c_3) \text{ pour } (c_2, c_3) \in L_2(C - \{a\})\}$.
   Donc $\operatorname{Card} A_1 = A_8^2 = 8.7$. Donc $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{9}$.
   Autre méthode : Changement d'univers $\Omega_b = [\![1, 9]\!]$ avec $\omega_b =$ le rang d'arrivé d'André.
   Alors $A_{1,b} = \{1\}$ donc $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{9}$.
3. On note $A =$"André sur le podium"$= A_1 \uplus A_2 \uplus A_3$, avec $A_k$="André arrive à la $k$-ième place. Les ensembles $A_1, A_2$ et $A_3$ ont le même cardinal par construction. Donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 3\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.
   Autre méthode : Avec le second modèle $A_b = \{1, 2, 3\}$. Donc $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
4. On note $b \in C$ son frère.
   Notons $B =$"a et b sur le podium". On a $B =$ "$B_1 \uplus B_1' \uplus B_2 \uplus B_2 \uplus B_3 \uplus B_3'$,
   avec $B_k$="a est devant b mais ne sont pas k-ième"
   et $B_k'$ ="b est devant a mais ne sont pas k-ième".
   On a $B_1 = \{(c, a, b) \text{ pour } c \in C - \{a, b\}\}$ de cardinal 7. De la même manière tous les $B_k$ et $B_k'$ sont de même cardinal. Donc $\operatorname{Card}(B) = 6\operatorname{Card}(B_1) = 6.7$. Donc $\mathbb{P}(B) = \frac{6.7}{9.8.7} = \frac{1}{12}$.
   Autre méthode : Changement d'univers $\Omega_c = \mathcal{P}_2([\![1, 9]\!])$ avec $\omega_c = \{r_a, r_b\}$ les rang des deux frères.
5. On note $C = B_1 \uplus B_2 \uplus B_3$="André arrive avant son frère".
   Donc $\operatorname{Card} B = 2\operatorname{Card} C$ puis $\mathbb{P}_B(C) = \frac{1}{2}$.

## Loi définie sur les singletons.

On pose $\Omega = [\![1, n]\!]^2$. On note $A = \{(i, 1) \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$ et $B = \{(n, j) \text{ pour } 1 \leq j \leq n\}$.

1. Déterminer une loi telle que $\mathbb{P}\{(i, j)\} = \alpha ij$ avec $\alpha$ à déterminer.
2. Calculer la probabilité de $A$ et de $B$.
3. Les évènements sont-ils indépendants ?

1. On calcul $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\{\omega\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha ij = \alpha \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2}$.
   Donc la loi est unitaire ssi $\alpha = \frac{4}{n^2(n+1)^2} > 0$.
   On peut alors vérifier que la loi est bien définie.
   En effet $\mathbb{P}\{(i, j)\} = \alpha ij = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2} \leq \frac{4n^2}{n^2(n+1)^2} \leq 1$.
2. On a $\mathbb{P}(A) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}\{a\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{(i, 1)\} = \sum_{i=1}^n \alpha i = \alpha \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{n(n+1)}$.
   De même $\mathbb{P}(B) = \sum_{b\in B} \mathbb{P}\{b\} = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}\{(n, j)\} = \alpha \frac{n(n+1)}{2} n = \frac{2}{(n+1)}$.
3. On a $A \cap B = \{(n, 1)\}$ est un singleton. Donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \alpha n1 = \frac{4}{n(n+1)^2}$.

Et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{2}{n(n+1)}\frac{2}{(n+1)} = \frac{4}{n(n+1)^2}$.
Donc $A$ et $B$ sont indépendants.

**Probabilité avec dénombrement**

Un jardinier mélange 4 oignons de tulipes rouges avec 4 oignons de tulipes jaunes. Il réalise une bordure en plantant en ligne au hasard les 8 oignons. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Les 4 tulipes rouges sont les unes à coté des autres.
2. Les tulipes rouges et jaunes sont alternées sur la bordure.
3. Les 3 tulipes situées à droites de la bordures sont rouges.

On note $\omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ les numéros des rang des tulipes rouges.
On a donc $\Omega = \mathcal{P}_4(\llbracket 1, 8\rrbracket)$ de cardinal $\binom{8}{4} = 70$.

1. On note $A =$"les 4 tulipes rouges sont les unes à coté des autres".
   Donc $A = \{\llbracket k, k+3\rrbracket$ pour $k \in \llbracket 1, 5\rrbracket\}$ de cardinal 5.
   Ainsi $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.
2. On note $B =$"Les tulipes rouges et jaunes sont alternées sur la bordure".
   On a $B = \{\{1, 3, 5, 8\}; \{2, 4, 6, 8\}\}$ de cardinal 2.
   Ainsi $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$.
3. On note $C =$"Les 3 tulipes situées à droites de la bordures sont rouges".
   On a $C = \{\{k, 6, 7, 8\}$ pour $k \in \llbracket 1, 5\rrbracket\}$ de cardinal 5.
   Ainsi $\mathbb{P}(C) = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.

**Probabilité conditionnée**

On propose une interrogation à des élèves avec trois définitions indépendantes. On sait que si l'élève a travaillé, il a 9 chances sur 10 de répondre correctement à chaque question. Dans le cas contraire, il y a 3 chances sur 10. On note $p \in [0, 1]$ la proportion d'élèves ayant préparé l'interrogation.

1. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 points sachant que l'on a travaillé ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 points sachant le contraire ?
3. Sur 45 élèves, 30 ont eu au moins 2 points. Quelle est la valeur de $p$ ?
4. Quelle est la probabilité qu'un élève ait travaillé, si il y a eu au moins 2 points ?

On note $A =$"L'élève a travaillé" et $X : \Omega \to \llbracket 0, 3\rrbracket$ le nombre de points.

1. La variable aléatoire $X$ sachant $A$ est le nombre de succès dans une succession de 3 épreuves de Bernoulli identiques et mutuellement indépendantes de Succès 9/10.
   Donc $\mathbb{P}_A(X = 3) = (9/10)^3 = \frac{729}{1000}$ et $\mathbb{P}_A(X = 2) = \binom{3}{1}(9/10)^2(1/10)^1 = \frac{243}{1000}$.
   Donc $\mathbb{P}_A(X \geq 2) = \frac{972}{1000}$.
2. Sachant le contraire $\bar{A}$, le Succès est de 3/10.
   On obtient $\mathbb{P}_{\bar{A}}(X \geq 2) = \frac{27+189}{1000} = \frac{216}{1000}$.
3. On sait que $\mathbb{P}(X \geq 2) = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$ d'après l'énoncé.
   D'après la formule de probabilité totale sur le système complet $\{A, \bar{A}\}$, on a $\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(X \geq 2) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(X \geq 2)$ Ainsi $\frac{2}{3} = p\frac{972}{1000} + (1-p)\frac{216}{1000}$. Donc $2000 = 3(756p + 216)$ puis $p = \frac{1352}{2268} = \frac{338}{567}$.
4. On souhaite calculer $\mathbb{P}_{X\geq 2}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(X\geq 2)}{\mathbb{P}(X\geq 2)}$ d'après la formule de Bayes.
   Donc on obtient $\mathbb{P}_{X\geq 2}(A) = 86.9\%$ à $10^{-4}$.