Semaine 18 - Du 9 au 13 Février 2026

Probabilités finies

Révision de la semaine 17

Probabilités conditionnelles

Formule des probabilités composées.
Formule des probabilités totales.
Formule de Bayes.
Évènements 2 à 2 indépendants et famille d'évènements mutuellement indépendants.

Variables aléatoires

Une variable aléatoire

Définition de $X : \Omega \to E$ avec E quelconque. Cas des variables réelles.
Espace probabilisé induit $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$ par la variable aléatoire X.
Espérance, linéarité et croissance.

Exemples standards

Variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}(X(\Omega))$, de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ ou binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Liste de Questions de cours :

a) Démontrer avec le dénombrement que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

b) Enoncer et démontrer la formule des probabilités composées pour n évènements.

c) Enoncer et démontrer les formules des probabilités totales et de Bayes pour un SCEI.

d) Montrer que l'espérance est linéaire et croissante.

e) Soit $D_1 \sim D_2 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$ deux V.A. indépendantes.
Calculer la loi et l'espérance de $X = \max(D_1, D_2)$.

f) Soit $D_1 \sim D_2 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$ deux V.A. indépendantes.
Calculer la loi et l'espérance de $S = D_1 + D_2$.

Exercices d'Application du Cours

1. On extrait 3 boules sans remise dans une urne qui contient 2 Rouges, 2 Vertes et 2 Bleus. Calculer la probabilité des évènements :
   (a) On a tiré au moins une verte.
   (b) On a tiré une boule de chaque couleur.
   (c) Sachant qu'on a tiré une verte, on a tiré au moins une boule de chaque couleur.
2. Soit $X_1 \sim ... \sim X_p \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ des V.A. mutuellement indépendantes et de loi identique. On note $Y = \max(X_1, ..., X_n)$.
   (a) Déterminer l'univers $Y(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$.
   (b) Pour $k \in Y(\Omega)$, montrer que $\mathbb{P}(Y \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$.
   (c) En déduire la loi de Y et son espérance.

Devoir étoilé

1. On considère trois urnes de couleurs :
   — L'urne rouge contient 2 boules rouges, 1 boule verte et 1 boule bleue.
   — L'urne verte contient 1 boule rouge, 2 boules vertes et 1 boule bleue.
   — L'urne bleue contient 1 boule rouge, 1 boule verte et 2 boules bleues.
   On effectue des tirages successifs avec remise suivant les règles :
   — Le premier tirage s'effectue dans l'urne bleue.
   — La couleur du tirage désigne l'urne pour faire le tirage suivant.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ avec les probabilités respectives des événements : R_n = la n-ième boule est rouge, V_n = la n-ième boule est verte et B_n = la n-ième boule est bleue.
   (a) Justifier que $\{R_n, V_n, B_n\}$ forment un SCEI.
   En déduire que $(1, 1, 1).X_n = 1$ avec . le produit matriciel.
   (b) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = \frac{1}{4} A X_n$.
   (c) Montrer que $A^2 = 5A - 4I_3$ et en déduire A^n.
   (d) En déduire X_n puis sa limite lorsque $n \to +\infty$.
   (e) La boule rouge est gagnante et rapporte 2 points et les autres font perdre 1 point. On note G_n le gain du n-ième tirage. Montrer que $\mathbb{E}(G_n) = (2, -1, -1).X_n$.
   (f) Calculer $(2, -1, -1).A$ et en déduire une relation de récurrence sur la suite $u_n = \mathbb{E}(G_n)$. Conclure.

Consignes :
— TD de Lundi : Préparer les exercices 1,2,3 et 4 du TD12.
— Pour les groupes qui n'ont pas de colle de Math cette semaine : Rédiger les exercices d'application du cours pour Lundi.
— Devoir étoilé pour Mardi.