Chaine de Markov et formule de Vlad

On considère trois urnes de couleurs :

— L'urne rouge contient 2 boules rouges, 1 boule verte et 1 boule bleue.
— L'urne verte contient 1 boule rouge, 2 boules vertes et 1 boule bleue.
— L'urne bleue contient 1 boule rouge, 1 boule verte et 2 boules bleues.

On effectue des tirages successifs avec remise suivant les règles :

— Le premier tirage s'effectue dans l'urne bleue.
— La couleur du tirage désigne l'urne pour faire le tirage suivant.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ avec les probabilités respectives des événements : $R_n =$ la n-ième boule est rouge, $V_n =$ la n-ième boule est verte et $B_n =$ la n-ième boule est bleue.

1. Justifier que $\{R_n, V_n, B_n\}$ forment un SCEI.
   En déduire que $(1,1,1).X_n = 1$ avec . le produit matriciel.
2. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = \frac{1}{4} A X_n$.
3. Montrer que $A^2 = 5A - 4I_3$ et en déduire A^n.
4. En déduire X_n puis sa limite lorsque $n \to +\infty$.
5. La boule rouge est gagnante et rapporte 2 points et les autres font perdre 1 point.
   On note G_n le gain du n-ième tirage. Montrer que $\mathbb{E}(G_n) = (2,-1,-1).X_n$.
6. Calculer $(2,-1,-1).A$ et en déduire une relation de récurrence sur la suite $u_n = \mathbb{E}(G_n)$. Conclure.

1. Les événements R_n, V_n et B_n sont 2 à 2 disjoints et forment une partition de l'univers. Donc $\Omega = R_n \uplus V_n \uplus B_n$ est un SCEI.

   En particulier $r_n + v_n + b_n = \mathbb{P}(R_n) + \mathbb{P}(V_n) + \mathbb{P}(B_n) = 1$. D'autre part, le produit matriciel entre la ligne $(1,1,1) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et la colonne $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est compatible et donne $(1r_n + 1v_n + 1b_n) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ un seul coefficient. Ainsi, on a bien $(1,1,1).X_n = 1$

2. On peut appliquer la FPT sur le SCEI $\{R_n, V_n, B_n\}$. On obtient $\mathbb{P}(R_{n+1}) = \mathbb{P}(R_n)\mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1}) + \mathbb{P}(V_n)\mathbb{P}_{V_n}(R_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(R_{n+1}) = r_n \frac{2}{4} + v_n \frac{1}{4} + b_n \frac{1}{4}$. C'est à dire $r_{n+1} = \frac{1}{4}(2r_n + v_n + b_n)$.

   De même, on trouve $v_{n+1} = \frac{1}{4}(r_n + 2v_n + b_n)$. et $b_{n+1} = \frac{1}{4}(r_n + v_n + 2b_n)$.

   Cette récurrence est linéaire et s'écrit $X_{n+1} = \frac{1}{4} A X_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 5A - 4I_3$.

   Donc $P(X) = X^2 - 5X + 4 = (X-4)(X-1)$ est un polynôme annulateur. Pour $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^n par $P(X)$. Donc $X^n = P(X)Q_n(X) + (a_n X + b_n)$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

   En évaluant en les racines 1 et 4, on obtient $\begin{cases} a_n + b_n & = 1 \\ 4a_n + b_n & = 4^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n & = \frac{4^n - 1}{3} \\ b_n & = \frac{4 - 4^n}{3} \end{cases}$.

   Puis en évaluant en la matrice A, on trouve $A^n = a_n A + b_n I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$.

4. On en déduit que $X_n = \frac{1}{4^n} A^n X_0 = \frac{4^{-n}}{3} \begin{pmatrix} 4^n - 1 \\ 4^n - 1 \\ 4^n + 2 \end{pmatrix}$ car $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puis $X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - 4^{-n} \\ 1 - 4^{-n} \\ 1 + 24^{-n} \end{pmatrix} \to_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\mathbb{P}(R_n) \sim_{+\infty} \mathbb{P}(V_n) \sim_{+\infty} \mathbb{P}(B_n) \sim_{+\infty} \frac{1}{3}$ sont équiprobables au bout d'un très grand nombre de tirages.

5. On a $\mathbb{E}(G_n) = 2\mathbb{P}(R_n) - \mathbb{P}(V_n) - \mathbb{P}(B_n) = (2,-1,-1).X_n$ par produit matriciel.
6. On a $(2,-1,-1)A = (2,-1,-1)$ est invariant par A. Donc $u_{n+1} = \mathbb{E}(G_{n+1}) = (2,-1,-1).X_{n+1} = \frac{1}{4}(2,-1,-1).X_n = \frac{1}{4}\mathbb{E}(G_n) = \frac{1}{4}u_n$. Or $u_0 = -1$ car la première boule est perdante. Donc $u_n = \frac{-1}{4^n}$ en tant que suite géométrique.

Probabilité conditionnelle

On extrait 3 boules sans remise dans une urne qui contient 2 Rouges, 2 Vertes et 2 Bleus. Calculer la probabilité des évènements :

1. On a tiré au moins une verte.
2. On a tiré une boule de chaque couleur.
3. Sachant qu'on a tiré au moins une verte, on a tiré une boule de chaque couleur.

1. On note V_k l'événement la k-ième est verte et $A =$"au moins une verte". On a $\bar{A} = \bar{V_1} \cap \bar{V_2} \cap \bar{V_3}$.
   Donc $\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\bar{V_1})\mathbb{P}_{\bar{V_1}}(\bar{V_2})\mathbb{P}_{\bar{V_1}\cap\bar{V_2}}(\bar{V_3})$ d'après la formule des probabilités composées.
   Puis $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4} = \frac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{5}$.
2. On note B_k la k-ième est d'une nouvelle couleur et $B =$"une boule de chaque couleur"$= B_1 \cap B_2 \cap B_3$. On obtient $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)$ d'après la formule des probabilités composées.
   Puis $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{6}\frac{4}{5}\frac{2}{4} = \frac{2}{5}$.
3. On veut calculer $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}$ d'après la formule de Bayes.
   Donc $\mathbb{P}_A(B) = \frac{(2/5).1}{(4/5)} = \frac{1}{2}$ car $\mathbb{P}_B(A) = 1$.

Soit $X_1 \sim ... \sim X_p \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ des V.A. mutuellement indépendantes et de loi identique. On note $Y = \max(X_1, ..., X_n)$.

1. Déterminer l'univers $Y(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$.
2. Pour $k \in Y(\Omega)$, montrer que $\mathbb{P}(Y \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$.
3. En déduire la loi de Y et son espérance.

1. On a $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.
   Et $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^p (X_i = 1)\right) = \prod_{i=1}^p \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{n^p}$.
2. On a $\mathbb{P}(Y \leq k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^p (X_i \leq k)\right) = \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(X_i \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$.
3. On a $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \leq k) - \mathbb{P}(Y \leq k-1) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}$.
   Puis $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(Y = k)k = \sum_{k=1}^n \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p} k$.